大森英樹／前田吉昭 著

量子的な微分・積分

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

監修者序

本シリーズについて

本シリーズは，20 世紀の様々な科学において，それらを支える基礎となった量子力学とそこから発する所産を，基礎から応用まで，数学的にきちんとした形で整理し，21 世紀における諸科学のさらなる発展に供することを目的に編集されたものである．それ故，本シリーズでは，量子論の基礎的概念の数理的説明・再検討からナノレベルでの工学的な実用までの，様々な階層の議論が念頭に置かれている．例えば，ヒルベルト空間による量子力学の記述とその限界，ミクロ・メゾ・マクロと言った階層を繋ぐ量子論とは何か，指数時間を要する計算時間をその対数時間まで縮めることを可能にする量子コンピュータの実現には量子論はどう使われどう改良されなければならないか，等々の議論があり，それらの理解には，量子論の数理の理解とその発展的検討が必要になる．本シリーズでは，正にそのために，21 世紀の科学の根幹となる量子論とその発展形を様々な観点から説明することを試みる．つまり，どこまでが量子論の範疇にあり，どこからがそれを越える部分か，がはっきり分かるように，全巻に渡り数学的に明白な取り扱いがなされている．本シリーズは，量子論の基礎をきちんと学ぼうとする学部学生・大学院生からその基礎をベースとして新たな課題に取り組んでいる研究者までを広く対象にしている．本シリーズを通して，有為な学徒が新たな科学のパラダイムの実現に向って各自の分野を切り開いて行くことが出来れば，と監修者は願っている．

本書について

この本は新しい視点から書かれた微分積分の教科書である．微分積分は特定の操作であって，例えば微分の操作で粒子の位置はその粒子の速度になる．このような操作が満たす性質や公式を中心として，微分積分を捉えていくのがこの本の特徴である．単純な計算から出発し，ていねいな計算を積み重ねるうちにすばらしい公式が導かれる．通常の微分積分の教科書で実数の概念あるいは基本的性質を出発点とし，姿が見えない一般の関数について証明を重ねて行く方式とは違い，多項式や指数関数など，具体的な式について計算を進めていくうちに，不思議な現象にも遭遇する面白味がある．

量子力学の創設期には，このような微分の操作を粒子の運動量として捉えることからハイゼンベルグの不確定性関係が生まれた.「量子的な微分・積分」という題は本書の内容をよく表している．本書は計算さえ厭わなければ，初等的なレベルで話がどんどん進んで行くが，その先には面白い未解決の課題も見えてくるし，研究が現在盛んになされている先端研究領域にも自然に近づくことができる．また数学の概念の構成に関する原理的な深い反省と考え方が背後に満ちていて，斬新な試みの書物である．

2004 年初春　監修者

この本について

微積分というと完成された数学体系と思われているから,「量子的な微分・積分」などと言うと,量子論的解析概論を目指しているかのように誤解される恐れがあるが,我々が目指しているのはそれとは逆で,むしろ完成された数学体系と思われている微積分も,演算子の考えを優先させる量子論の方から見るとまだまだ奇妙なものを沢山含んだ未完成の体系に見えてくるということを読者に伝え問題提起をしたいのである.

普通の本格的微積分の教科書はたいてい実数の公理系から始まる.この本ではあえてそれを避けて,数学科とか物理学科に入って来る平均的学生が微積分に対して持っている演算子的理解に基礎を置いた.多くの学生にとって微積分は行うべき操作を表示する符丁でしかないことは教えていて毎年痛切に感じていることである.同様に関数概念も写像として意識されていると言うよりはその関数記号の持つ演算子的性質にのみ注意が払われている.我々はむしろこの感覚を追認する所から出発している.この場合「演算子的」という形容詞は大切である.我々が大切にしているのは数学の論理性というよりはむしろ手作業で獲得された感覚である.体で獲得されたものは最初は論理的には曖昧であっても磨きあげていくと新しいものに行きつくことがあるからである.

関数概念

上で関数という言葉を使ったが,この本では演算子代数よりもう少し広く,機能という意味で「関数」という言葉を使っているので少し解説しておこう.

まず数学で普通に使っている「関数」と言う言葉を考えよう．この日本語は数学用語であって，今日では「写像」という概念で統一されている．これがブルバキ的統一見解なのだが，関数の概念は歴史的にはもっと漠然としたものである．関数は少し古い教科書では「函数」と書かれている．

「函数」は中国語による function の音訳でそれがそのまま日本に輸入されたものだそうで，漢字制限などの理由で今のように書かれるようになったものらしい．英語の辞書を引くと function の第一義は「機能」であって，例えば life function とは「生命機能」の意味である．

これでわかるように，関数なる言葉は始めから「写像(mapping)」の意味に使われていたわけではなく，最初は言葉どおり機能の意味，つまり，あるものを入力するとそれに一定の演算，操作を行ってあるものを出力する「機能」の意味に使われている．

この機能の部分を，どんなつまらない機能でも機能は機能であると割り切って単なる black box と考えてしまうのがブルバキ流の理解である．しかし，考えてみればこの black box に持たせるべき機能が昔からそんなに無定見であった筈はない．この機能はせいぜい 4 則演算のような代数的操作，あるいは極限を取るという操作，ぐらいなものであって，この意味では

$$f(x) = \begin{cases} 0 : & x = \text{無理数} \\ 1 : & x = \text{有理数} \end{cases}$$

のごときものは決して「関数」の仲間に入って来ないのである．これは写像としての関数，つまりブルバキ的に広げられた関数概念において始めてそうと認識されるもので，高校生，素朴な大学生の大半が上のようなものを「うさん臭い関数」だと思っていることは確かである．上のような「関数」における機能とは入力された数に対して「好き」とか「嫌い」とか言っているようなものであって，機能と呼べるようなことは何もしていないからである．

(x が無理数だとどうやって判定する ?)

これに対して

$$x^5 - 3x + 1, \qquad e^x, \qquad \sin x, \qquad \log x$$

のような関数は入力された数に対してどのような操作をして出力とするかその操作が(記号の約束を通して)明示されている．この明示された操作がその

関数の持つ機能である．このように，機能が「何をどうするのか」をはっきり示している場合には関数の定義域は自ずと関数がきめてくれるか，あるいは状況に応じて適宜判断すれば良いものであってことさら明示する必要のないものとなるのである．

これに対してブルバキ流に広げられた関数概念では関数の定義域や値域をはっきり述べていないと不明確になってしまう．こうして，ブルバキ的関数概念は次第に function から mapping へと変化していったのである．

この本では演算子の代数を考えるので，ブルバキ的な流れに逆らって機能としての関数概念を重要視しているのである．

このような意味で関数という言葉を使うとき我々が知っている関数はどんなものであろうか？ 多項式と初等超越関数以上の関数をどのぐらい知っているだろうか？

微積分の演算子

一変数微積分に出て来る演算子はほぼ次のようなもので生成されている：

$$f(x) \to xf(x), \quad f(x) \to \hbar i \frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{1}{\hbar i}\int_0^x f(t)dt, \quad f(x) \to f(0).$$

多くの高校生はこれらの演算子の相互の関係を操って計算するのだが，これらは非可換である．しかし非可換性に注目させるような微積分の教科書は見当たらない．ワイル代数というのは上の演算子のうち最初の二つを使って生成される代数のことだから，微積分を知っている人ならば(無意識かもしれないが)ワイル代数の計算も操っていることになる．

しかし，非可換の代数ではいつでも表示問題というのが付いて回る．つまり代数の元を一定の一意的方法で記述する問題である．これがはっきりしていないと一見違って見える元が同じ元なのかどうか判定するのが難しくなるからである．ワイル代数の場合この方法は大きく分けて正規順序表示とワイル順序表示の二種類ある．

第 1 章ではともかく表示法を定めてそれを使って知っている関数空間に話を移しかえ，基本となるワイル代数の積公式を少し広い所まで拡張して考えることができるようにする．そうしただけで，そこには半逆元とか，真空とかといった普通の微積分の教科書では見かけない奇妙なものが入っているこ

とを注意する．

実数の公理系から構成する数学としての微積分学は基礎の部分はできあがっているのだが，演算子の代数の側面から眺めると，まだまだ得体のしれないものがゴロゴロしている不可解なものなのである．計算はやや重たいが，どれも学部学生の微積分の知識で十分である．しかし扱うものが見慣れたものばかりではないから十分注意して計算しないといけない．所どころにある演習問題もきちんとやってみてほしい．

ここでは一つの元は色々な表示を持つ．表示が違えば計算公式も違うのは当然であるが，一つの表示で発散しても，別の表示では計算可能といったことが起こったり，計算できても結合律が壊されたりする現象が起こるのである．最も奇妙に見えるのは代数の生成元が右逆元と，これとは異なる左逆元の両方を持つといった，結合代数の中では起こり得ない現象が起こることである．

このように演算子的見方を少し進めると面倒な問題が山積しているのであるが，演算子の代数ととして捉える感覚は極めて量子論的なのである．量子物理学は不確定性原理と称するものをいわば公理のように考えて成立しているのだが，これは「正準共役の関係にある二つの物理量は同時に無限に正確に観測することはできない」というものである．これをできるだけ数学的に言い換えようとすると observable の全体はワイル代数，またはそれを拡張したもの(ワイル空間と呼んでいる)であるということになるのである．

ここで最も大切な視点は**我々はワイル代数の元が演算子として作用する空間(x の空間)に住んでいるのではなく，ワイル空間の中に住んでいる**のだという視点である．したがってこれを演算子の代数という述べ方をするのは正しくない．数学で「演算子」という言葉を使うと，どの空間に働く演算子であるか(演算子の定義域)を要求されるのが常であるが，我々は演算子の間の代数的関係に注目しているのであって，定義域は問題にしていないからである．したがって我々が問題にしているのは「最後には作用素表現をつけて演算子の代数にしてしまうべき空間」とでも言うべきものである．これは物理学科で教える微積分の立場をそのまま認めた態度でもある．

標準的教科書の解析概論によって出来上がっているのは x の空間(実数論)に基礎を置く微積分の数学的基礎づけのみなのである．こういう態度をとる

と，数学の神聖な領域が侵されたとして猛反撃を食らうのが現状であるが，我々は数学の人間であり，そういう反撃も十分考慮している．我々の考えは微積分に対してこのような態度をとる数学をも正しい数学として許容すべきであるというものである．

このような基本姿勢で一変数関数論と常微分方程式系の解法と特殊関数だけが重要視される一見古風な価値観で統率されているから，この本を教科書のように使うには大学の現状の数学科のカリキュラムの中ではとうてい無理であろうし，これをセミナリーテキストとして使えば学生達に無用の混乱を与える結果になる恐れもある．我々が期待している読者は数学的能力はともかくとして，批判精神とバランス感覚に優れた人達である．(但し，計算が好きということは要求されている.)

我々はまた次のようにも考えている.「拡張された意味での微積分の代数(ワイル空間)が，実は我々の素朴な直観以前に存在していて，我々はそこから様々な直観的，素朴な事実を学んだのだ」と考えている．つまり，物理学者にとっては様々な実験結果の集団が実在しているわけだが，この本で我々が取っている基本的態度は「演算子的に見た微積分の諸事実が実在なのだ」というものである．

つまり，この本で我々が書いたのは理論ではなく，(それがどんなに奇妙に見えようとも)事実の観察記録にすぎないということである．

指数関数

第 2 章，第 3 章では演算子的な指数関数を扱う．物理法則の多くは因果関係の法則であるから observables の時間変化として

$$\frac{d}{dt}f_t = H * f_t, \quad f_0 = f$$

のような式(発展方程式)で与えられることが多い．するとこの法則に従う個々の現象はこれの解ということになるわけだが，解は形式的には

$$f_t = \sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}(H*)^k * f$$

と書かれる．これを $e_*^{tH} * f$ のように書いてみれば指数関数の重要さは理解してもらえると思う．

第2章でワイル代数を指数関数が自然に入ってくるような所まで拡張する．計算の基礎は上の発展方程式の実解析的解は「存在すれば一意的」ということである．そのために位相線型空間や，位相代数の取り扱いが要求されてくるので(最少限度)それらを取り込んでおいた．ここでは作用素表現を一旦捨てているところがコンヌの非可換幾何学の立場と大きく違うところである．

計算のしかたは大きく分けて正規順序表示によるものと，ワイル順序表示によるものと2種類あるのだが，大切な視点は「同じものの計算法が2種類ある」ということである．ここでは第1章で出てきた真空とか半逆元と指数関数との関係がはっきりするばかりでなく，真空と称するものもワイル空間内の元として登場する．これを使うと物理で真空表現と称されているのと同じことがワイル空間内でもできるようになり，こうすると自然に微積分の代数もワイル空間の中に入ることが分かるのである．

しかし同時に奇妙なことも現れる．ほとんどの元は同時に二つの逆元を持つことが分かるのである．これも結合律を壊してしまう現象である．それから指数関数の計算に特異点が現れる．しかし，この特異点は本質的なものでなく表示方法によって変わる．これは多様体上の関数の局所座標表示に似たことではあるが，代数の元の表示と，局所座標表示とは全く概念的に違うものだから同じように考えて良いのかどうかは不明であるが，相互の変換は $\exp\frac{\hbar}{2}\partial_u\partial_v$ といったような無限階の微分作用素による変換となる．これは一見恐そうに見えるが，初等微積分の枠内で扱える部分があり，これだけでのかなりのことが分かる．計算はやや個別的になるが計算を詳しく書いておいた．

この相互変換が2次式の指数関数の空間のところでは1対1写像ではなく2対2写像にしかならないという極めて面白い性質を持つのである．これは計算の時には，係数が1ではなく $\frac{1}{2}$ だといった極めてデリケートな形で現れるので，十分注意して計算を進めないといけない．(我々はこの部分の計算をチェックするだけで結局1年使っている.)　さらにこの章では極地元と称する，ちょっと解釈に苦しむ元も登場する．これらは面倒ではあるが普通の微積分の計算でできるのである．

ていねいに計算を行ってみると極地元は「2価の元」(あるいは集合 $\pm i$ 上を動く不定元)と解釈しなければならなくなるのだが，このような元の概念は普通の点集合論のなかには無いのだからかなり理解にとまどうものである．

しかし，このような奇妙な現象は我々が仕組んだわけではなく，微積分の中にもともと仕組まれていたものであって，これを現代数学的に取り出すとひどく奇妙に見えてしまうのである．

離散描像

第 4 章で uv のような元の Spec は離散的でかつ二通りに考えられるという，古典的感覚では決して起こらない現象が観察される．これも計算から自然に分かることである．結合律を守ろうとすればどうしても対称性を犠牲にしてどちらかを捨てなければいけないのだが，既成の数学にも物理にもそのための理論は存在していないから，ここから先はいわば手探りである．

物理法則は多くの場合因果関係の法則であるが，ほとんど時間の反転に対して対称にできている．時間をどちらむきに取っても理論は対称なのだが，両方同時に選ぶと因果律を壊すから，どちらかを捨てなければならないということに似ている．

この離散描像を使うと物理でフェルミオン表示と呼ばれているものも自然にワイル空間の中に取り込めることを示す．これを考えるには代数で使う不定元という感覚はかなり有効と思えるので，その考えかたも入れたが，そういう感覚が正しいものかどうかははっきりしない．この辺のことは計算をし尽くせばどの描像が正しいかは自然に得られるわけだから，多くの人が我々の計算を後追して公式の山を築いてくれることを望むわけである．フェルミオン表示と前に述べた「2 価の元」とはかなり近い所にあるように思えるのだがはっきりした計算はできていない．我々の信念では，このようにして大衆をまきこんだ形でしか面白い，真に革命的なものは発生しないのである．

第 5 章で指数関数どうしの積公式を作ることに照準を合わせている．計算は総和記号がらみで評価式を計算している所以外はほとんど常微分方程式系を解く作業ではある．しかし計算はかなり面倒なので詳しい計算を載せておいた．普通はここまで計算しないと思われる位計算しているので，この先多変数の場合の計算をやろうとする人達の参考になると思われる．

変数の束縛

第 6 章で関数空間の対称性を $SL(2,\mathbb{C})$ 対称性から $SL(2,\mathbb{R})$ 対称性へと小さくしてそのかわり結合代数として扱える関数の種類を増やし，同時に積の公式をフーリエ変換を使って積分形で与える．これは対称性を犠牲にして結合律の成立範囲を拡大しているのであるが，この位まで広くすると逆に既成の関数解析との関係が見えてくる．

しかし，一般に演算子的に代数を扱ったとき，変数の束縛の問題は全くといっていいほど手付かずである．集合間の写像としての関数を考えているときには変数の動く範囲を束縛するというのは全く造作もないことであり，単に定義域を制限するだけで良いのだが，非可換の所で話をしていて，写像としてではない関数を考えているときには何をどうすることが変数を束縛することに対応するのか数学的定義は無いのである．

しかし物理でも古典描像では変数の束縛は全く自由に行っているものだから，これを何とか取り込まなくてはならない，我々は代数幾何と同じ立場で，「変数の束縛とは上手に逆元を添加することである」と考えることにしている．ところが，ワイル代数の生成元はもともと半逆元を持っているのだから，これに勝手に逆元を添加すると結合律を壊してしまうので，どういう場合ならばどの程度の逆元が添加できるかということについて，様々な計算から探りを入れるという段階に留まっている．

しかし変数を実数に束縛することは比較的容易で，積公式を積分形で与えることで実行できる．このように積公式を積分形で書いてしまうとヘルマンダーの擬微分作用素が自然に視野に入って来ることが分かる．

ところが，変数を例えば上半平面に制限するとか，$\mathbb{C}-\{0\}$ へ制限するという話になると理論らしいものは一つもなく問題は極めて深刻になってくるのである．この本ではこの部分についてはほんの少し扱っただけである．変数を上半平面に制限していると思われるモデルは色々考えられるので，それらの間の「座標変換」を問題にしなければならないのだが，領域の制限の問題と同様，非線型の座標変換に関する理論は存在していないのである．

変数の束縛について色々考えてくると次第に明らかになってくることだが，量子論の中には「ガウスの曲面論」に相当するものが存在していない．これ

は次のようなことである．今日の場の理論というのはどれも何らかの意味で「宇宙全体」について発言しているようになっていて，それが本当の宇宙についてなのか，実験室内の小宇宙についてなのか，はたまたそういう区別に意味があるのかという部分がはっきりしていないのである．実験室内の小宇宙として切り取られたものは一体大宇宙の何を反映しているのだろうか？

古典力学では，ガウスの曲面論がそれに答えている．場の理論の中にはそれに相当するものがないのである．従って，例えばどうすれば「電磁場は無いが電磁ポテンシャルが存在するような世界」を実験室内に作ったことになるのか，どうすれば「その世界の中だけを運動する電子」を考えることができるのかといったことの**定義**がはっきりしていないのである．

二つの逆元と超関数

前に一つの元に二つの異なる逆元が出てくると述べた．これが結合律を壊している原因であり，結合律を壊す等と言うと悪いことが起こっている印象になるのだが，第7章でこのことが逆に佐藤の超関数論ときれいな関係が付くことを観察する．つまり，演算子的に見た微積分はちょっと目には奇妙に見えるかもしれないが，良く見ると既成の数学にちゃんとつながるのである．

さらに，第7章で極座標系を演算子の立場で扱う．点描像がしっかりしているところでは極座標系などは一つのものであろうが，演算子の立場では極座標系にあたるものも色々考えられ，どの見方が良いか等について発言できる状態ではないということが分かる．つまり，量子力学的に微分幾何を作ろうとすれば，我々はもっとどっぷりと量子論的世界に浸って様々なデリケートな描像について考えるべきなのであって，古典的には縮退してみえる「極座標系」に一つの解釈を与えたからといって解決するような性質のものではないのということを分かって欲しい．

にもかかわらず，我々は「量子論は(全数学が集合論の上の構造なのだとブルバキが言ったのと同じ意味で)演算子的に見た微積分の代数に内包されている筈のものである」と考えている．なぜなら物理は(拡大解釈はするだろうが)微積分しか使っていないからである．

そうであるとすれば，我々がこれまでに見て来た微積分の代数の中にもっ

といろいろな代数が取り込めて良いはずである．

後半で別の形の指数関数を扱う．ここでは時間の一方向きにしか解けない指数関数が出て来る．こういうものは熱伝導方程式ではおなじみだが，もっと簡単な形で出て来る．こういうものまで微積分の代数は含んでいるのである．これは実変数を正の所に束縛することを考えるときの雛型になると思っている．と同時に，時間の一方向性を解くヒントになると思っている．これを使ってハイゼンベルグ代数の真空表現も作れることを示してある．

既成の代数

第 8 章ではベレーズィンが作用素表現付きで作って見せた代数とか，量子群と呼ばれている作用素表現付きの代数というものを我々の数学の中に取り込むことを一応の目安とした．第 8 章で扱われる既成のものははじめから結合代数として作られているものである．ここでは，$\hbar$ にあたるものも作用素表現されているので，それを取り込むために前の章で与えた一方向きにしか解けない指数関数を使っている．

第 9 章でベレーズィンの球面が古典力学で使う簡約という手段でも得られることを示す．球面というのは古典的には様々な手段で得られているから，これは非可換多様体を考える時の練習みたいなものである．

このようなことが自由にならない限りガウスの曲面論にあたるものなど及びもつかないものだからせめてこのようなものに切れ目を入れておこうとしているわけである．（しかし，ガウスの曲面論にはまだたどりつけないでいる.）

古典的な所から予測されるのとは少し違った形の公式が得られるのだが，このほうが我々にとってはしっくりくるのである．この現象は我々が最初に考え始めたときには気づいていなかったもので，かなりの思想変更を要求されるが，ともかく計算できるのである．

しかし奇妙なことばかりあげつらって喜んでいるというのはいかにも無責任だから，第 10 章で，前に述べた極地元を取り込んでリー群にあたるものを作ることを試みた．極地元の奇妙さを取り除くために多様体の概念を少し拡張した方が良いという主張を述べた．しかし，この部分は全く認知されていな

い部分でこういうものをいきなり本の形で述べるのはいかがなものかと躊躇はしたが，良く見ると似たようなものはすでに gerbe とか sheaf of groupoid とかいった概念で別の所に現れているようなので問題なかろうと判断した．

この部分ははっきりした考えがまだ定着していない部分であるので，確立した数学だと誤解してもらっては困るのだが，第 1〜5 章が奇妙に見える現象を計算主体で解説するに留まっていて，この先どんな数学につながるのか見えにくいという批判を受けることを気遣ってあえて書くことにしたのである．

総じて，この本で述べられていることは，微積分を演算子的に見直して代数を拡張していくとかなり奇妙なものが見えて来るということである．我々がこの本で述べていることは，だから，理論でも何でもなくて微積分を演算子的に見直すと見えて来る事実にすぎない．

数学として完成されたものの前にひれ伏してお線香を炊いてあがめるだけの姿勢をあらためて完全にユーザーの立場に立ってこれを眺め直すならば我々の立場も理解してもらえると思われる．そして，我々が述べたいのは，この立場から見るとき，微積分学はまだまだ謎を秘めた不可思議なものに見えるということなのである．そして，それは量子論の謎にも直結しているのだという驚くべきことなのである．量子論の深い謎は誰か一人の天才が出現すれば解決してしまうような生易しいものではない．これに立ち向かう為には，おそらく数千人の汗と血みどろの努力が必要なのであって，そのためには 50 年ぐらいのスパンで何かを立ち上げないといけないと思っている．

我々は(我々だけかもしれないが)量子論的世界がどのようなものであるのか知らないのである．それについては数学的にはまだ何も発言できる時期になっていないと考えている．たとえばこの本で述べたことは大部分多変数に拡張できるが，多変数で変数を束縛するという概念がどのようなものになるのか全く分かっていないのである．つまり，**ガウスの曲面論は量子論の中には存在していないのである**．こういうものが未完成のままで一般相対論の量子化だけができあがるというのは信じ難いのである．

目　次

第1章 非可換代数とその拡張

量子的な微積分と言うと何か特別のことを始めるような印象を持つかもしれないが，普通の微分，積分を演算子代数の立場から見直して，さらにそれを拡張したものを考えようとしているのである．

この本を通して，一つのまるい卵が成長するにつれて対称性を失っていくのと同様に，素朴な，対称性の高い所から始まって次第に様々に特化していく姿が見えるであろう．

いきなり演習問題で恐縮だが，この本を読もうと思う人は次の演習問題に食らいつける人であってほしい：

演習問題　複素変数で，$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ とする．このとき，方程式 $\tan z = a$ が解を持つのは $a \neq \pm i$ の場合のみであることを示せ．

関数論では上のことを「$\tan z$ という関数の除外値は $\pm i$ である」という言い方をする．

1.1　自由テンソル代数とその商代数

まず，言葉の定義から始めよう．係数体を $\mathcal{R} = (\mathbb{C} \text{ or } \mathbb{R})$ とする線型空間 V があって，これの任意の元 a, b に対して「積」と称する以下の性質を持つ演

算 $a*b$ ($\in V$) が定義されているものを $\mathcal{R}$ 上の**結合代数**(associative algebra) と呼ぶ：任意の $a,b,c \in V$, 任意の $\lambda \in \mathcal{R}$ に対して

- $(a,b) \to a*b$ は $V \times V$ から V への $\mathcal{R}$-双線型写像(bilinear map)，即ち $a*(b+c) = a*b + a*c$, $(a+b)*c = a*c + b*c$, $(\lambda a)*b = a*(\lambda b) = \lambda(a*b)$ をみたす.

- $(a*b)*c = a*(b*c)$ (結合律)が成立.

n 変数多項式の全体は普通の積に関して結合代数をなすが，$a*b = b*a$ をみたしている．この性質が成立しているものを**可換代数**(commutative algebra)，それ以外の場合を**非可換代数**(non-commutative algebra)と呼ぶ．非可換代数の例としては 2×2 の行列全体等があるが，ここではもう少し簡単な例を考えよう.

1.1.1　自由テンソル代数

二つの文字 u, v を何度か使って，$u{\otimes}v{\otimes}v$ とか $v{\otimes}u{\otimes}u{\otimes}u{\otimes}v$ のように勝手に $\otimes$ を間にはさんで配列したものを**単語**(word)と呼ぶ．記号を簡単にするために $u{\otimes}u{\otimes}u$ は u^3 のように書くことにし，$u^0 = v^0 = 1$ と約束しておけば，単語は一般に自然数の列 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ を使って

$$W^\alpha = u^{\alpha_1}{\otimes}v^{\alpha_2}{\otimes}\cdots{\otimes}u^{\alpha_{N-1}}{\otimes}v^{\alpha_N}$$

のように表すことができる．$\alpha = 0$ のときには $W^0 = 1$ と約束しておく.

単語 W^α と単語 W^β の**積**(product) $W^\alpha{\otimes}W^\beta$ は単に文字をくっつけて並べるだけとすれば結合律 $(W^\alpha{\otimes}W^\beta){\otimes}W^\gamma = W^\alpha{\otimes}(W^\beta{\otimes}W^\gamma)$ の成立は明らかであろう．そこで $\mathcal{R}$ を係数として単語の有限個の一次結合全体を考えこれを $\mathcal{T}^2$ とする．積 $\otimes$ を分配律と，スカラー倍の規則

$$(\lambda W^\alpha){\otimes}(\mu W^\beta) = \lambda\mu W^\alpha{\otimes}W^\beta, \quad \lambda, \mu \in \mathcal{R}$$

で拡張すれば $\mathcal{T}^2$ は非可換な結合代数となる.

$\mathcal{T}^2$ を二つの文字 u, v から生成された**自由テンソル代数**(free tensor algebra)

と呼び，u, v を**生成元**(generator)と呼ぶ．生成元の個数がもっと多いときでも全く同様の定義をする．n 個の文字 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ で生成された自由テンソル代数を T^n と書くことにする．

自由テンソル代数は生成元の間に何の関係も設定しないという意味で最も非可換性の高い結合代数であるが，一般の代数は生成元の間に何らかの関係式が成立している．一般の結合代数の積を $*$ と書く．このとき $u * v = v * u$ という関係が成立していれば生成される結合代数は可換代数である．これほどでなくても，$u * v = qv * u$ $(q \in \mathcal{R}, q \neq 0)$ といった関係が成立している場合がある．

一般の結合代数というのは生成元といくつかの関係式で書かれることが多いのだが，自由テンソル代数はその関係式が一つもないものである．何も関係式が無いということはあらゆる束縛から開放されているということだから，その意味を込めて自由テンソル代数と呼ぶのである．同時にこれは他の(有限生成の)代数はすべて自由テンソル代数にある束縛の加わったものにすぎないと見ていることも意味する．

自由テンソル代数には一つ一つの単語の語順を完全に逆にするという演算 $A \to \iota(A)$ が考えられる．この演算は係数体が実数体 $\mathbb{R}$ の時にはそのまま線型同型写像に拡張され，$\iota \circ \iota = 1$, $\iota(A \otimes B) = \iota(B) \otimes \iota(A)$ が成立する．このようなものを**対合的反自己同型**(involutive anti-automorphism)と呼ぶ．しかし対合的反自己同型の記号にきまりは無いので，単に $A \to \bar{A}$ のように書かれる場合もある．

係数体が複素数体 $\mathbb{C}$ の時には $\iota(i) = -i$ として反線型同型写像として拡張する場合(この場合が普通なので，これを ι で表す)と，そのまま複素線型同型写像として拡張する場合との 2 種類がある．後者はあまり使われないが，記号を区別して θ と書いたりする．

1.1.2 関係式イデアル

自由テンソル代数を束縛して生成元の間にいくつかの関係式を設定するにはどのようすれば良いであろうか？たとえば $u \otimes v = qv \otimes u$ $(q \in \mathcal{R}, q \neq 0)$ と

いう関係式を設定したいとする．これは，$u \otimes v - qv \otimes u = 0$ とすることだから，自由テンソル代数 $\mathcal{T}^2$ の元で $A \otimes (u \otimes v - qv \otimes u) \otimes B$, $A, B \in \mathcal{T}^2$ のように書かれる元をすべて 0 と思ってしまえばよいのである．

まず，上のように書かれる元の有限和の全体を I とする．I は $\mathcal{T}^2$ の部分代数であるばかりでなく，任意の $\mathcal{T}^2$ の元 A, B にたいして $A \otimes I \otimes B \subset I$ となる性質がある．I を $\mathcal{T}^2$ の**両側イデアル**(two sided ideal) と呼ぶ．今の場合は関係式で作る両側イデアルなので，これを特に**関係式イデアル**(relation ideal) と呼ぶこともある．関係式イデアルを生成している関係式を**基本関係式**と呼ぶ．

$A - B \in I$ のとき，$A \sim B$ と書くことにすると，$A \sim C$, $B \sim D$ ならば $A + B \sim C + D$, $A \otimes B \sim C \otimes D$ であることが容易に確かめられる．

そこで，線型空間としての商空間 $\mathcal{T}^2/I$ を考え $\mathcal{T}^2$ から $\mathcal{T}^2/I$ への自然な射影を π とすれば，$A \sim B$ と $\pi(A) = \pi(B)$ は同じ意味になり，さらに $\tilde{A} = \pi(A)$, $\tilde{B} = \pi(B)$ のとき $\tilde{A} * \tilde{B} = \pi(A \otimes B)$ と定義すれば，$\tilde{A} = \pi(A) = \pi(A')$ のように同じ $\tilde{A}$ に射影されるものは沢山あるが

- $\tilde{A} * \tilde{B}$ は A, B の取り方によらずに定義でき
- $(\tilde{A} * \tilde{B}) * \tilde{C} = \tilde{A} * (\tilde{B} * \tilde{C})$
- $(\tilde{A} + \tilde{B}) * \tilde{C} = \tilde{A} * \tilde{C} + \tilde{B} * \tilde{C}$,　$\tilde{A} * (\tilde{B} + \tilde{C}) = \tilde{A} * \tilde{B} + \tilde{A} * \tilde{C}$
- $(\lambda \tilde{A}) * \tilde{B} = \lambda(\tilde{A} * \tilde{B}) = \tilde{A} * (\lambda \tilde{B})$,

となる．つまり $\mathcal{T}^2/I$ は自然に結合代数となる．

商空間を作るということは，分母に書かれるものを零と見るということである．一般にある関係式を設定したいと思ったときには自由テンソル代数を関係式イデアルで割った商空間を作ればよい．生成元が有限個の場合には自由テンソル代数というのはいわば真っ白な紙みたいなもので，そこには商空間を作ることでどんな関係式でも書き入れることができるのである．これを**商代数**(quotient algebra) と呼ぶ．

関係式イデアル I が ι, θ で不変なときには商代数 $\mathcal{T}^2/I$ の上に ι, θ が自然に定義される．これも同じ記号で表す．

1.1.3 非可換代数の色々な例

ここでは非可換代数の例をいくつかあげ，後で使う用語も定義しておく．全部分かる必要はないが，ワイル代数，微積分の代数，ハイゼンベルグ代数は後の方で必要になる．

行列環(matrix algebra)

非可換代数の中で最もなじみの深いものは $n \times n$-複素行列全体 $M(n;\mathbb{C})$ の作る代数であろう．以下では行列の積を $A{*}B$ のように書くことにする．

(i,j)-成分のみが1で他の成分は0という行列 e_{ij} を**行列要素**(matrix element)と呼ぶ．$M(n;\mathbb{C})$ は n^2 個の行列要素を基底とする線型空間であり，$n \times n$-行列は基底の一次結合として書かれる．関係式は

$$e_{ij} * e_{kl} = \delta_{jk} e_{il} \quad 1 \le i,j,k,l \le n \tag{1.1}$$

である．ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．この代数についてはおなじみであろう．つまり，代数 $M(n;\mathbb{C})$ は e_{ij}，$1 \le i,j \le n$ を生成元とし，(1.1)を基本関係式とする代数である．

e_{ij} を $e_i \otimes e_j$ のように考えておけば対合的反自己同型 ι,θ はここにも自然に定義される．

$$\iota(A) = {}^t\bar{A} \ (= A^*), \quad \theta(A) = {}^tA$$

である．$M(n;\mathbb{C})$ は複素線型空間 $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への線型写像全体のなす集合とも思える．

演習問題 1 一般の結合代数で $[a,b] = a{*}b - b{*}a$ とすると，

$$[a, b{*}c] = [a,b]{*}c + b{*}[a,c], \quad [a{*}b, c] = a{*}[b,c] + [a,c]{*}b$$

が成立することを確かめよ．また，$\iota([a,b]) = [\iota(b), \iota(a)]$ を確かめよ．

$M(n;\mathbb{C})$ の中には様々なものが入っている．

$$GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n;\mathbb{C}); \det A \neq 0\}$$

は $M(n;\mathbb{C})$ の開部分集合であり，群にもなっている．これを**一般線型群**(general linear group)と呼ぶ．

演習問題 2　$X \in M(n;\mathbb{C})$ に対して，無限級数 $e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^{*n}$（但し $X^{*n} = X*X*\cdots*X$ である）は収束することを示し，かつ，e^{tX} は微分方程式

$$\frac{d}{dt}F(t) = X*F(t), \quad F(0) = I \text{ (単位元)}$$

の解であることを示せ．

$SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n;\mathbb{C}); \det A = 1\}$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の正規部分群である．これを**特殊線型群**(special linear group)と呼ぶ．$SL(n,\mathbb{C})$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の複素 n^2-1 次元閉部分多様体にもなっており，単位元における接空間は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n;\mathbb{C}); \mathrm{trace}\, A = 0\}$ で与えられる．

$A \in M(n;\mathbb{C})$ に対して $A^* = {}^t\bar{A}$ とする．$U(n) = \{A \in M(n;\mathbb{C}); A*A^* = 1\}$ は $M(n;\mathbb{C})$ の中のコンパクト部分集合で，かつ $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群である．これを**ユニタリー群**と呼ぶ．これは，$M(n;\mathbb{C})$ の中の実 n^2 次元部分多様体にもなっている．

演習問題 3　$X \in GL(n;\mathbb{C})$ に対して $X^* {*} X$ は正定値エルミート行列であり，$\log X^* {*} X$, $\sqrt{X^* {*} X}$ もエルミート行列として定義でき，しかも $X\sqrt{X^* {*} X}^{-1}$ はユニタリー行列であることを示せ．（これを X の**ユニタリー部分**と言う.）

演習問題 4　$U(n)$ の正規部分群 $SU(n) = \{A \in U(n); \det A = 1\}$ を**特殊ユニタリー群**と呼ぶ．$SU(2)$ は次のように与えられることを示せ：

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha, \beta \\ -\bar{\beta}, \bar{\alpha} \end{bmatrix} ;\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

また，$U(2) = U(1) \times SU(2)$（直積）であることを示せ．しかし $U(2)$ の元 A を $A = e^{i\theta}B$, $B \in SU(2)$ と書いた場合には $\det A = e^{2i\theta}$ であることに注意せよ．

演習問題 5　エルミート行列 H に対し，e^H は正定値エルミートであることを使って，正定値エルミート行列全体は可縮であることを示し，これを使って $SL(2;\mathbb{C})$ は単連結であることを示せ．（補題 5.5 参照.）

$A \in U(n)$ に対しては $|\det A| = 1$ だから，$\det A = e^{i\theta}$ である．

係数体を実数にして，$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n;\mathbb{R}); \det A \neq 0\}$ とする．これは $M(n;\mathbb{R})$ の開部分集合であり，群でもある．

$O(n) = U(n) \cap GL(n,\mathbb{R})$ は**直交群**，$SO(n) = SU(n) \cap GL(n,\mathbb{R})$ は**回転群**と呼ばれる．

ワイル代数

$2n$ 個の生成元 $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n$ に対し $\hbar$ を正の定数(正の数を動くパラメーターと思うときもある)として，関係式を，$1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$u_i * u_j - u_j * u_i = 0, \quad v_i * v_j - v_j * v_i = 0, \quad v_i * u_j - u_j * v_i = \delta_{ij}\sqrt{-1}\hbar$$

で定義した結合代数を**ワイル代数**と呼び，W_{2n} と書く．u_i, v_i 以外の積は可換であるが，$i = j$ だと $v_i * u_i = u_i * v_i + \sqrt{-1}\hbar$ のようになる．この関係式を書くには交換子記号 $[a, b] = a * b - b * a$ を用いると都合が良い．上の式は

$$[u_i, u_j] = 0 = [v_i, v_j], \quad [v_i, u_j] = \delta_{ij}\sqrt{-1}\hbar \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

のように書くことができる．また，線型同型写像 $F : W_{2n} \to W_{2n}$ が任意の $f, g \in W_{2n}$ で $F(f * g) = F(f) * F(g)$ をみたすとき(ワイル代数の)**同型写像**と呼ぶ．$\hbar$ は数扱いだから，この場合は $F(\hbar) = \hbar$ である．

$u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n, \hbar$ で張られる線型空間 V^{2n+1} の線型同型写像 $A : V^{2n+1} \to V^{2n+1}$ が

$$A(\hbar) = \hbar, \quad [A(u_i), A(u_j)] = 0 = [A(v_i), A(v_j)],$$
$$[A(v_i), A(u_j)] = \delta_{ij}\sqrt{-1}\hbar$$

をみたしておれば同型写像 $F_A : W_{2n} \to W_{2n}$ に一意的に拡張される．A はたとえば，$A(u_i) = u_i + c_i\hbar, A(v_j) = v_j + d_j\hbar$, $(c_i, d_j \in \mathcal{R})$ のようになっていても良い[注1]．

$f \in W_{2n}$ に対し，$\mathrm{ad}(f) : W_{2n} \to W_{2n}$ なる線型写像を

$$\mathrm{ad}(f)(h) = [f, h] \tag{1.2}$$

で定義する．$[W_{2n}, W_{2n}] \subset \hbar W_{2n}$ であるから，$D = \frac{1}{\hbar}\mathrm{ad}(f)$ は次の性質

$$D(f * g) = D(f) * g + f * D(g) \tag{1.3}$$

を持つ．(1.3)の性質を持つ D を**微分**(derivation)と言う．

ワイル代数は，u_i, v_j を n 変数の関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ の空間に働

注1 ガリレイ変換に対応している．後の方でローレンツ変換に対応するものも出て来る．

く次のような演算子(operator)と思うと分かりやすい：

$$u_i:\ f(\boldsymbol{x}) \to x_i f(\boldsymbol{x}), \qquad v_j:\ f(\boldsymbol{x}) \to \sqrt{-1}\hbar\frac{\partial}{\partial x_j} f(\boldsymbol{x}). \tag{1.4}$$

ワイル代数はもともと上のような演算子が生成する代数として定義されたのだが，一旦代数が定義されてしまえばあとは演算子であったことを忘れて代数的関係だけを頼りに考えることができる．この本はその方向を意図している．

微分積分を演算子代数の立場から見直すと最初に述べたが，それはワイル代数を基礎にして考えるという意味だと思っていて良い．

演習問題 6 (1.4)がワイル代数の関係式をみたすことを確認せよ．

u_i, v_i のように $[f,g] = -\hbar\sqrt{-1}$ となる (f,g) を**量子正準共役対**(quantum conjugate pair)と言う．

微積分の代数

始めから演算子を考えるが，u, v, δ をそれぞれ微分 $u:\ f(x) \to \frac{d}{dx}f(x)$，積分 $v:\ f(x) \to \int_0^x f(t)dt$，及び原点への射影演算子 $\delta:\ f(x) \to f(0)$ とする．ただし，x は $\mathbb{R}$ を動く変数と考えている．x が $\mathbb{C}$ を動く変数のときには積分は複素積分とする．

すると微積分で教わったように，生成元どうしに次の関係式

$$u*v=1, \quad v*u=1-\delta, \quad u*\delta=0, \quad \delta*v=0$$

が成立していることは容易に分かる．u と v はこのように互いに完全な逆元の関係にはなっていない．このようなものを**半逆元**と呼ぶ．正確には v は u の**右逆元**，u は v の**左逆元**と呼ぶ．この代数を**微積分の代数**と呼ぶことにする．

演習問題 7 $v^p*\delta*u^q$ は (p,q)-行列要素になっていることを示せ．

ワイル代数と微積分の代数と二つ見て来ると，ワイル代数で v_i と書かれていたものに右逆元はないのだろうか？とか，そういうものがあったとしてそれは x_i に関する積分と考えられるのだろうか？と考えてみたくなるであろう．

実はそれが可能なのであるが，そのためにはワイル代数を拡張して指数関数が考えられるようにならないといけない．

テイラー展開

点 0 でのテイラー展開の公式も当然のことながら微積分の代数の計算から得られる．以下では $\frac{d}{dx}$ を ∂_x と書くことにする．

まず，$(\int_0^x)*(\partial_x)=1-\delta$ を書き直して，$h(x)=h(0)+\int_0^x(\partial_x h)(t)dt$ と書いておき，$(\partial_x)^k h$, $(k=1,2,\cdots)$ にも同じ公式をあてはめ，次々に代入する．これを代数らしく書くと，まず，最初の式は恒等写像を 1 と書いた時 $1=\delta+(\int_0^x)*(\partial_x)$ を意味するから，これに同じ式を代入して

$$1=\delta+(\int_0^x)*\{\delta+(\int_0^x)*(\partial_x)\}*(\partial_x)=\delta+(\int_0^x)*\delta*(\partial_x)+(\int_0^x)^2*(\partial_x)^2.$$

これを繰返すと，

$$1=\sum_{k=0}^{n-1}(\int_0^x)^k*\delta*(\partial_x)^k+(\int_0^x)^n*(\partial_x)^n$$

が得られる．$(\int_0^x)^k*\delta*(\partial_x)^k(h)=\frac{1}{k!}x^k h^{(k)}(0)$ だから，これは無論

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}x^k h^{(k)}(0)+\int_0^x\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}h^{(n)}(t_n)dt_n\cdots dt_2dt_1$$

を意味している．

最後の項は剰余項と呼ばれるが，これ以上は微積分の代数の計算公式だけからは計算できない．x が実数を動く場合にはもう少し詳しく計算できるように見えるが，実はこれを計算するには次のような重積分の計算公式が必要となる：

$$\begin{aligned}\Big(\int_a^x\Big)_*^n(f))&=\int_a^x dt_1\int_a^{t_1}dt_2\cdots\int_a^{t_{n-1}}dt_nf(t_n)\\&=\int\cdots\int_{a\le t_n\le\cdots t_2\le t_1\le x}f(t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n\\&=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t_n)^{n-1}f(t_n)dt_n.\end{aligned}\tag{1.5}$$

($f=h^{(n)}$, $a=0$ としてあてはめる.)　注意してほしいのは，上の公式(1.5)は微積分の代数の中に組み込まれている公式ではなく，これとは別の多重積分の公式だということである．積分の変数変換の公式は微積分の代数の中に組み込まれてはいないのである．

普通の微積の教科書ではここから変数を $t_n = a + \theta(x-a)$ と変換して

$$\int_a^x (x-t_n)^{n-1} f(t_n) dt_n = (x-a)^n \int_0^1 (1-\theta)^{n-1} f(a+\theta(x-a)) d\theta$$

のように計算する．しかし，右辺は上に述べた演算子の組合せではうまく書くことはできない．つまり演算子の代数だけ見ていたのでは上の公式は出て来ないのである．

さらに，普通の微積の教科書では，最後の式に平均値の定理を使って剰余項の積分記号を取り除くのであるが，このような計算は実数の公理を使わないと出ないもので，微積分の代数の計算公式だけからは得られないものなのである．

我々は微積分の代数しか使わないと序文のほうで言ったのだが，あまり厳格にそれを守るわけにもいかないので，この程度のことは使っている．

ハイゼンベルグ代数，接触ワイル代数

ワイル代数 W_{2n} では $\hbar$ は正の定数として扱われていたが，これを変数として扱って $-\nu i$ と書き，中心(center)[注2]の元として扱ったものを**ハイゼンベルグ代数**(Heisenberg algebra)と呼び，$\mathcal{H}_{2n}$ と書く．これは基本関係式

$$[\nu, u_i] = [\nu, v_j] = 0, \quad [u_i, v_j] = \nu\delta_{ij}$$

で定義される代数である．ハイゼンベルグ代数で ν を純虚数とみなしてワイル代数 W_{2n} を得ることを**簡約**と呼ぶ．ハイゼンベルグ代数はワイル代数と同じように見えるかもしれないが，ここでは同型写像の概念が広くなる．

次のように定義される写像 $A_t : \mathcal{H}_{2n} \to \mathcal{H}_{2n}$

$$A_t(\nu) = e^{2t}\nu, \quad A_t(u_i) = e^t u_i, \quad A_t(v_j) = e^t v_j, \quad 1 \le i, j \le n \tag{1.6}$$

を考える．A_t は $\mathcal{H}_{2n}$ から $\mathcal{H}_{2n}$ への同型写像に拡張され，$A_s A_t = A_{s+t}$ となっている．このようなものを1係数の**拡張的自己同型**(expansive automorphism)と呼ぶ．これはワイル代数の同型ではなく，ハイゼンベルグ代数としての同型である．

注2　他のすべての元と可換な元全体を中心(center)と呼ぶ

A_t の**無限小生成元**というのは $t=0$ での微分 $D(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}A_t(f)$ のことだが，これは (1.3)で述べた微分(derivation)の性質を持つ．今の場合は

$$D(u_i)=u_i, \quad D(v_j)=v_j, \quad D(\nu)=2\nu, \quad 1\le i,j\le n$$

で定義される．

そこで，この微分 D を $\nu^{-1}{*}\mathrm{ad}(\tilde{\tau})$ として生み出す仮想的元 $\tilde{\tau}$ を考え

$$[\tilde{\tau},u_i]=\nu{*}u_i, \quad [\tilde{\tau},v_j]=\nu{*}v_j, \quad [\tilde{\tau},\nu]=2\nu^2, \quad 1\le i,j\le n$$

という交換関係をハイゼンベルグ代数に付け加えて代数を作る．この代数を**接触ワイル代数**と呼んで，$\mathcal{C}_{2n+1}$ と書く．$\mathcal{C}_{2n+1}$ は $\mathcal{H}_{2n}$ を自然に含んでいるが，実は $\mathcal{C}_{2n+1}$ は $\mathcal{H}_{2n+2}$ を超越的に拡張した代数の中に埋め込むこともできる[注3]．

$\mathcal{C}_{2n+1}$ の同型としては，(1.6)式の A_t を $A_t(\tilde{\tau})=\tilde{\tau}$ とおいて $\mathcal{C}_{2n+1}$ まで拡張したものの他に，

$$B_t(\tilde{\tau})=\tilde{\tau}+ct, \quad B_t(\nu)=\nu,\ B_t(u)=u,\ B_t(v)=v$$

のようなものもある[注4]．

接触ワイル代数 $\mathcal{C}_{2n+1}$ において ν と可換な元の全体はハイゼンベルグ代数 $\mathcal{H}_{2n}$ に戻る．この操作も**簡約**と呼ばれる．

演習問題 8 $e_*^{t\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau}}=\sum_{k\ge 0}\frac{t^k}{k!}(\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau})^k$ に意味があるものとして，

$$\frac{d}{dt}\Big(e_*^{t\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau}}*u_i*e_*^{-t\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau}}\Big)=[\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau},\ e_*^{t\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau}}{*}u_i{*}e_*^{-t\frac{1}{\nu}\tilde{\tau}}]$$

を示し，$e_*^{t\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau}}*u_i*e_*^{-t\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau}}=e^tu_i$ を示せ．（ヒント：$[\frac{1}{\nu}*\tilde{\tau},\ u_i]=u_i$．解の一意性.）

テープリッツ代数

すでに，微積分の代数の中に現れているものだが，この節で右逆元とか左逆元のような半逆元が生成する代数を一般的に扱っておこう．このような半

注3 8.2.2 参照．このようなことをしないと接触ワイル代数の正当性(無矛盾性)は主張できない．

注4 このように，ν や τ まで動かしてしまう同型があるということが，ローレンツ群に似ているわけである．

逆元の存在はかなり普遍的であるので，このようなものの取扱は後々かなり重要になる．

定義 1.1 A, B が $A * B = 1, B * A \neq 1$ を満たす時，A, B が生成する結合代数 $\mathfrak{T}$ を**テープリッツ代数** (Töplitz algebra) と呼ぶことにする[注5]．

$\varpi = 1 - B * A$ と置けば，$B * A = 1 - \varpi$ であり，

$$A * \varpi = \varpi * B = 0, \quad \varpi * \varpi = \varpi$$

となる．$\mathfrak{T}$ の元は一般に

$$\sum_k b_k B^k + \sum_{k,l} c_{kl} B^k * \varpi * A^l + \sum_l a_l A^l$$

のような姿に書かれる．$B^k * \varpi * A^l$ は (k, l)-行列要素の役目をしており，

$$(B^k * \varpi * A^l) * (B^m * \varpi * A^n) = \delta_{lm} B^k * \varpi * A^n$$

となる．

演習問題 9 上の式を証明せよ．また，$\sum_k v_k B^k * \varpi$, $v_k \in \mathbb{C}$ をベクトルと見て

$$(\sum_{k,l} c_{kl} B^k * \varpi * A^l) * \sum_k v_k B^k * \varpi$$

を計算せよ．

上の演習問題をやれば自然に気がつくと思うが，$I = \sum_{k=0}^{\infty} B^k * \varpi * A^k$ のような元がもし代数の中に存在しているとするならば，I は，$\{\sum_k v_k B^k * \varpi\}$ なるベクトル空間に恒等変換として作用する．無論 A とも B とも可換で，結局 $\mathfrak{T}$ のどの元とも可換であり，しかも $I * I = I$ である．つまり，$I = 1$ と思ってよい．

もちろん，I のような超越的な元をそのまま $\mathfrak{T}$ の元と考えることはないが，上手に位相を入れることで

$$1 = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} B^k * \varpi * A^k$$

注5 テープリッツ行列と言うほうが一般的かもしれない．

と考えることはできる．そうすると，

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} B^k * \varpi * A^{k+1}, \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} B^{k+1} * \varpi * A^k$$

として良いであろう．そればかりか，$\mathfrak{T}$ の全ての元は (∞, ∞) 行列として

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} B^k * \varpi * A^l$$

のような形に表示できる．

演習問題 10 $\mathfrak{T}$ の元は行列としてはどんな特徴を持つか．

演習問題 11 $\sum_k v_k B^k * \varpi$, $v_k \in \mathbb{C}$ のように表示される元の全体を $\mathfrak{V}$ と書き，これをベクトル空間と見，$\mathfrak{T}$ の元を $\mathfrak{V}$ に働く線型作用素と見る．このとき次のことを示せ：

(a) $A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ は全射であり，かつ $\mathrm{Ker} A = \mathbb{C}\varpi$.

(b) $B : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ は単射であり，かつ $\mathrm{Coker} B \cong \mathbb{C}\varpi$. ただし，$\mathrm{Coker} B = \mathfrak{V}/B\mathfrak{V}$ である．

半逆元を考えている時に，$a \mapsto \bar{a}$ なる対合的反自己同型を同時に考えると一見奇妙なことが起る．u° を u の右逆元とする．$u * u^\circ = 1$ だから $\overline{u^\circ} * \bar{u} = 1$ ともなる．従って $u = \bar{u}$ だと，u は右逆元と左逆元を同時に持つことになる．$u^\bullet = \overline{u^\circ}$ と置く．すると今度は結合律が成立していると

$$u^\bullet = u^\bullet * (u * u^\circ) = (u^\bullet * u) * u^\circ = u^\circ$$

となり，u° は半逆元ではなく，純逆元だということになってしまう．$\bar{u} = u$ だと半逆元は同時に逆元となってしまうのである．

$u = \bar{u}$ であるような元に右逆元で，逆元でないものがあるときには，$\overline{u^\circ}$ は u の左逆元 $u^\bullet$ で，しかも $u^\circ \neq u^\bullet$ としなければならないのだが，上のような結合律が成立しては困ることになる．

後で述べる完備ワイル空間ではこういうことが起るのだが，そこでは $(u^\bullet * u)$ と u° の積も，$u^\bullet$ と $(u * u^\circ)$ の積も限定された意味でしか定義されない．

どうしても $a \mapsto \bar{a}$ なる対合的反自己同型を持った結合代数の中で u の右逆元を考えたい場合には，$\bar{u} = u^\circ$ としておかないといけないようである．このような例は極座標の所に登場する．

クリフォード代数

ボゾンとかフェルミオンとか言い出す物理の中でワイル代数と対になって登場するのが**クリフォード代数**(Clifford 代数)と呼ばれる代数で，これは n 個の生成元 $u_1,\cdots,u_n$ に対し $\hbar\neq 0$ を定数として，関係式を

$$u_i{*}u_j+u_j{*}u_i=2\delta_{ij}\,\hbar,\qquad (1\le i,j\le n)$$

で定義した結合代数である．これを Cliff_n と書く．$n=2m$ のときには

$$\xi_i=\frac{1}{2}(u_{2i-1}+\sqrt{-1}u_{2i}),\quad \eta_i=\frac{1}{2}(u_{2i-1}-\sqrt{-1}u_{2i}),$$

と置くと，$\xi_1,\cdots,\xi_m,\eta_1,\cdots,\eta_m$ は**反交換子**記号 $\{a,b\}=a*b+b*a$ を用いて

$$\{\xi_i,\xi_j\}=0=\{\eta_i,\eta_j\},\quad \{\xi_i,\eta_j\}=\delta_{ij}\hbar\quad (1\le i,j\le n)$$

のように書くことができる．しかし，記号 $\{\,,\}$ は後の方でポアソン括弧積の記号としても使うので混同しないように願いたい．

ワイル代数の線型空間としての次元は ∞ であったのに対し，クリフォード代数の線型空間としての次元は 2^n である．上の関係式で，$\hbar=0$ としたものが**グラスマン代数**(Grassmann algebra)である．

2×2 行列で

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0, & -i\\ i, & 0\end{bmatrix}$$

とおけば，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1,\ \sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1=0$ である．σ_1,σ_2 が $M(2;\mathbb{C})$ を生成していることは明らかである．さらに，

$$\sigma_3=\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{bmatrix}=-i\sigma_1\sigma_2$$

とおけば，$\sigma_3^2=1$ であり，

$$\sigma_1\sigma_2=i\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3=i\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_1=i\sigma_2$$

となることが分かる．$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ を**パウリ行列**(Pauli) と呼ぶ．

後のほうで，$\hbar\neq 0$ の時，Cliff_n は拡張されたワイル代数(完備ワイル空

間)の中に入ることが分かる．また $Cliff_{2n}$ は 2×2-行列 $M(2;\mathbb{C})$ の n 階テンソル積 $M(2;\mathbb{C})^{\otimes n}=M(2^n;\mathbb{C})$ と同型であることが分かるが，ここでは深入りしない．

一方 $n=\infty$ のときには，ワイル代数の中のかなりの元が $Cliff_{\infty}$ の元として表示できたりする．(4 章参照.)

$\mathfrak{so}(3)$ の普遍展開環

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中で剛体回転の全体を考えるとそれは回転群と呼ばれる群 $SO(3)$ をなす．これの単位元の接空間は無限小回転全体の空間と考えられるが，それは 3 次元の空間をなし，自然に，Lie 環と呼ばれる代数構造を持つ．3 次元の回転群 $SO(3)$ の単位元の接空間は

$$x=\begin{bmatrix}0, & 1, & 0\\ -1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0\end{bmatrix},\qquad y=\begin{bmatrix}0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\\ 0, & -1, & 0\end{bmatrix},\qquad z=\begin{bmatrix}0, & 0, & 1\\ 0, & 0, & 0\\ -1, & 0, & 0\end{bmatrix}$$

で張られており，この x,y,z は $[x,y]=z$, $[y,z]=x$, $[z,x]=y$ なる交換関係を満たす．つまり，x,y,z と，関係 $[x,y]=z$, $[y,z]=x$, $[z,x]=y$ で定義される Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ である．

これの**普遍展開環**とは，文字 x,y,z 及び交換子を使った関係 $[x,y]=z$, $[y,z]=x$,$[z,x]=y$ だけで定義される[注6]結合代数のことである．これを $\mathfrak{U}(\mathfrak{so}(3))$ と書く．

上の x,y,z で 3×3-行列空間の中で代数を生成させればそれは高々9 次元の代数であるから[注7]この中では $1,x,x^2,\cdots,x^9$ は一次従属となり，非自明な関係式

$$a_0+a_1x+\cdots+a_9x^9=0$$

が成立するはずである．この場合には $x^2(1+x^2)=0$ が成立しているがこのような関係は 3×3-行列空間の中で代数を考えたから出て来たことで，$\mathfrak{so}(3)$ の普遍展開環の中では出て来ない式である．

注6 つまり，$x*y-y*x=z$ のように関係を設定する．

注7 実際にも 9 次元の代数である．

演習問題 12 $x^2 + y^2 + z^2$ は $\mathfrak{U}(\mathfrak{so}(3))$ の全ての元と可換であることを示せ．このような元を**カシミール元**(Casimir element)と呼ぶ．

1.2　位相完備化

自由テンソル代数 T^2 の中で元(げん)がパラメーター t で動くものとしそれを f_t としよう．このときこの動きが

$$\frac{d}{dt} f_t = H{\otimes} f_t, \quad f_0 = 1 \tag{1.7}$$

という法則に従っているとしてみよう．この式を書くだけならばそれは T^2 の中で出来ている．しかし，これの答はあるだろうか？

形式的に答を作ってみれば答は $e_{\otimes}^{tH} = \sum \frac{t^k}{k!} H^{\otimes k}$ であるがこんな元は T^2 の中には無いのである．

自由テンソル代数はそれを関係式イデアルで商空間を作れば何でも出て来るという意味で極めて普遍的なものだから**普遍テンソル代数**とも呼ばれるが，多項式程度の元しか考えていないから $e_{\otimes}^{u} = \sum \frac{1}{k!} u_{\otimes}^{k}$ といった元は考えておらず，元の種類がまだまだ貧弱である．

つまり，自由テンソル代数とかその商代数の中では**法則は書くことができても，その法則に従う個別のものは表現できない**のである．そこでこれらの代数に位相を入れて完備位相代数にして，極限 (lim) を用いて定義されるような元も考えられるようにしたいのである．

1.2.1　位相線型空間の基礎用語

線型空間を完備化するための位相線型空間の基礎的用語を少しまとめておこう．この部分は概念的にかなり高度になっているから，しっくり来ない人は他の参考書[注8]も見てほしい．

[注8] 意外に役にたつのが数学辞典(岩波)である．

ノルム，セミノルム系，コーシー列

複素数体 $\mathbb{C}$ を係数体とする線型空間 V を考える．V の元 v に対し実数 $\|v\| \geq 0$ を対応づける写像 $\|\cdot\|$ が**ノルム**(norm)であるとは次の(1)～(3)をみたすときを言う：

(1) $\|v\| = 0$ ならば $v = 0$.

(2) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.

(3) $\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$.

上の性質のうち(1)が除かれているものをセミノルム(semi-norm)と言う．

ノルムが与えられれば $\mathrm{dist}(x, y) = \|x - y\|$ のように距離を定義して距離空間とすることができる．

距離空間 X とは X の任意の二点 x, y に対して距離 $\mathrm{dist}(x, y)$ と称する ≥ 0 の実数が与えられている空間のことで，距離関数 $\mathrm{dist}(x, y)$ とは次の(1)，(2)，(3)の公準をみたすもののことである：

(1) $\mathrm{dist}(x, y) \geq 0$ であり，等号 $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ は $x = y$ のときのみ成立.

(2) $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(y, x)$,

(3) $\mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \geq \mathrm{dist}(x, z)$ （三角不等式）.

距離関数のように「近い，遠い」といったことが言える仕掛けを伴った空間を**位相空間**と呼び，その仕掛けの方を**位相**と呼ぶ．これは「連続」という概念が設定できる最小の仕掛けである．距離空間は位相空間の特別なものである．

線型空間のようなものは，位相とは無関係の代数演算を持っているが，その代数演算がすべて連続となるように位相が設定されているものを**位相線型空間**(topological linear space)と呼ぶ.

線型空間 V では距離は可算個のセミノルム系 $\{\|\cdot\|_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を使っても与えられる：

まず,「すべての $k \in \mathbb{N}$ で $\|x\|_k = 0$ となる」のは $x = 0$ の場合に限るとしよう．このとき $x, y \in V$ に対して

$$\mathrm{dist}(x, y) = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{\|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k}$$

と定義すると，これで距離関数の公準をみたす．このようにして定義される位相を**セミノルム系で定義される位相**と言う．

距離空間であればコーシー列(Cauchy sequence)なる概念を使って**完備化**(completion) なるものが考えられる．これは極限として考えられる元をすべて仲間に入れてしまう操作である．距離空間 (X, dist) で**コーシー列**とは，点列 $\{x_n\}_n$ で，任意の ε に対してある番号 N があり，$m, n \geq N$ の所ではつねに $\mathrm{dist}(x_m, x_n) < \varepsilon$ という性質が成立しているもののことである．

定義 1.2 距離空間 X でコーシー列がすべて (X 内の点に) 収束する場合，X を**完備距離空間** (complete metric space) と呼ぶ．

距離空間 X の完備化(completion)とはコーシー列の収束先を全部 X に付け加えて完備距離空間を作ることを言う．距離空間 X の完備化はいつでも可能で結果として得られる集合は一意的である．

演習問題 13 距離空間 X に於いて，点列 $\{a_n\}$ が X の点 a に収束しているということを，ε, N-論法で述べ，さらに a を特定せず，何かある点に収束するということを ε, N-論法で述べて見よ．コーシー列の定義が自然に得られることを確認せよ．

位相線型空間で，距離空間にもなっており(無論その距離に関して代数演算は連続になっており)，その距離が平行移動で不変，つまり

$$\mathrm{dist}(x + z, y + z) = \mathrm{dist}(x, y)$$

であり，かつその距離に関して完備であるものを**フレッシェ空間**(Fréchet space)と呼ぶ．

位相代数

位相空間が同時に結合代数にもなっていて，この位相に関して代数演算がすべて連続になっているとき**位相代数**(topological algebra)と言う．

フレッシェ空間が結合代数にもなっていて，この位相に関して代数演算が連続になっているとき**フレッシェ代数**(Fréchet algebra)と呼ぶ.

1.2.2 実解析性

ここでフレッシェ空間 F に値を持つ関数の微積分について少し述べて，後で使う実解析性についてまとめておこう.

I を開区間，$f: I \to F$ を I から F への写像とする．f が $a \in I$ で微分可能とは $\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}(f(a+\delta) - f(a))$ が F の元として存在する場合を言う．これを f の(a における)微分と呼んで $f'(a)$ と書く，f が I の各点で微分可能で $f'(t)$ が連続のとき f は C^1 級であると言う．帰納的に $f'(t)$ が C^{k-1} のとき f は C^k 級であると言う．任意の自然数 k に対して C^k 級であるような f は C^∞ 級であると言われる.

微分可能性は連続線型写像に関して安定である．つまり F, G をフレッシェ空間，$\varphi: F \to G$ を連続線型写像とする．$f: U \to F$ が C^k 級であれば，$\varphi f: U \to G$ も C^k 級である.

また F がフレッシェ代数，$f, g: I \to F$ が C^k 級であれば積 $(fg)(t) = f(t)g(t)$ も C^k 級で，積の微分の公式(ライプニッツ則)がそのまま成立する.

積分についても同様で，I を開区間，$f: I \to F$ を I から F への連続写像とする．このとき定積分(リーマン積分) $\int_a^b f(t)dt$ も $F = \mathbb{R}$ の場合と全く同様に定義され F の元となる.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \qquad \int_a^x \frac{d}{dt}f(t)dt = f(x) - f(a)$$

等普通の微積分の公式が成立する．しかし f の値が $\mathbb{R}$ でないので，中間値の定理とか平均値の定理のような，実数の公理系を使う定理は成立しない.

$\mathbb{R}$ の開集合 U からフレッシェ空間 F への写像 $f: U \to F$ が**実解析的**(real analytic)であるとは，任意の $\tau \in U$ において $\varepsilon(\tau) > 0$ がとれて，f が収束冪級数の形で，$|s| < \varepsilon(\tau)$ の所で

$$f(\tau + s) = \sum_k \frac{1}{k!} a_k s^k, \quad a_k \in F$$

のように書かれることを言う．この場合 $a_k = \partial_s^k f|_{s=0}$ となる．

F がバナッハ(Banach)空間[注9]のときには $\sum_k \frac{1}{k!}\|a_k\||s|^k$ が収束するとき，ノルムに関して絶対収束すると言う．フレッシェ空間 F が可算個のセミノルム系 $\{\|f\|_m; m=1,2,3,\ldots\}$ で定義されているときには，この部分を任意のセミノルム $\|\cdot\|_m$ に関する

$$\sum_k \frac{1}{k!}\|a_k\|_m|s|^k$$

の絶対収束性に置き換える．任意のセミノルムに関して絶対収束する冪級数は収束する．

収束半径

フレッシェ空間 F が可算個のセミノルム系 $\{\|f\|_m; m=1,2,3,\ldots\}$ で定義されている場合で考える．

冪級数 $\sum_k a_k s^k$, $a_k \in F$ について次のことが成立する：

補題 1.1 下の (1), (2) をみたす R $(0 \le R \le \infty)$ が一意的に存在する：

(1) $|s| < R$ ならば上の冪級数は任意のセミノルム $\|\cdot\|_m$ に関して絶対収束する．

(2) $|s| > R$ ならば上の冪級数は収束しない．

証明　まず，ある s_0 で $\sum_k a_k s_0^k$ が収束したとしよう．すると，任意のセミノルム $\|\cdot\|_m$ に関して $a_k s_0^k$ は有界となるので，$\sup_k \|a_k s_0^k\|_m \le M_m$ と置く．すると，$|s| < |s_0|$ なる任意の s に対して

$$\sum_k \|a_k s^k\|_m \le \sum_k M_m |s/s_0|^k = M_m \frac{1}{1-|s/s_0|} < \infty$$

だから，$\sum_k a_k s^k$ は収束する．ここから後はおなじみの論法であろう．　□

補題 1.2 $\sum_{k\ge 0} a_k s^k$ と $\sum_{k\ge 1} k a_k s^{k-1}$ は同じ収束半径を持つ．

実解析性は連続線型写像に関して安定である．つまり，次の補題が成立する：

注9　一つのノルムで位相が定義されており，それに関して完備である線型空間のこと．

補題 1.3 F, G をフレッシェ空間，$\varphi : F \to G$ を連続線型写像とする．$f : U \to F$ が実解析的であれば，$\varphi f : U \to G$ も実解析的である．

1.2.3 関数空間の完備化

複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則（複素数の意味で微分可能）な関数を**整関数**と呼ぶ．変数が多くなっても同じように呼ぶ．$Hol(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}^n$ 上で正則な関数，つまり整関数全体とする．少し一般的に U を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし，$Hol(U)$ を U 上の正則関数全体のなす線型空間とする．

コーシーの積分公式

$\mathcal{R} = \mathbb{C}$ の場合には複素積分という演算子がある．U は $\mathbb{C}$ の単連結開領域とし C は U 内にある任意の区分的に滑らかな単純閉曲線で反時計まわりに向きの付いたものとする．

コーシーの積分公式は任意の $h \in Hol(U)$ に対して C の内部では

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

となることをいっているのである．一致の定理を考えるならば，右辺を演算子と見て

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bullet(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

と書いてもよい．単純閉曲線 C は任意だからこれは恒等演算子の表示が無数にあることも述べているし，同時にどんな演算子でもその表示というものは無数にあることを意味している．

多変数の時にはこの公式は各変数毎に成立する．

コンパクト開位相

$Hol(U)$ が可算個のセミノルム系で定義されたフレッシェ空間となるように，この空間に位相を入れよう．この位相は**コンパクト開位相**（compact-open topology）と呼ばれるが，一様位相と呼ばれているものとは違うから御用心．

まず U が与えられたとき，U のコンパクト部分集合の列 $K_1, K_2, K_3, \cdots$

で $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ であり，$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ となるものが(一意的ではないが)とれる．このとき U の任意のコンパクト部分集合 K に対して $K \subset K_m$ となるような番号が必ず見つかることが容易に示せる．

$\{K_k\}_{k=1,2,\ldots}$ を使って $Hol(U)$ にセミノルム $\|\ \|_k$ を

$$\|f\|_k = \max_{z \in K_k} |f(z)|$$

と定義する．このセミノルム系で定義される位相をコンパクト開位相と言う．$Hol(U)$ はこの位相に関して位相線型空間となるが，実は正則関数に位相を入れていることから，次のことも分かる：

補題 1.4 $Hol(U)$ はコンパクト開位相に関して完備である．

証明　コーシーの積分公式を使うと $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ であり，さらに $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ は φ が C 上連続関数ならば C の内側で正則関数を与える．従って，正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1,2,\ldots}$ がコンパクト開位相に関してコーシー列ならば，これは任意の閉曲線 C 上で連続関数に収束するから，上の積分公式より $\{f_n(z)\}_{n=1,2,\ldots}$ は任意の閉曲線 C の内側で正則関数に収束する．C は任意だからこれは $\{f_n(z)\}_{n=1,2,\ldots}$ の極限が正則関数であることを意味する．

変数が多くなっても証明の原理は全く同じである．□

C^r 位相，C^∞ 位相

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$C^\infty(U)$ を U 上の $\mathbb{C}$-値 C^∞ 関数全体のなす線型空間とする．$C^\infty(U)$ が完備な位相線型空間となるように，この空間に位相を入れよう．この位相は C^∞ 一様位相と呼ばれているものとは違うから早合点しないようにしてもらいたい．

次のような多重添字記号を用いる：自然数の n 組 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して

$$\partial_x^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$$

のこととし，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ とする．

まず，C^r 位相について，セミノルム系 $\|\ \|_{r,k}$ を定義しよう．

$\mathbb{C}^n$ の時と同様 U のコンパクト部分集合の列 $K_1, K_2, K_3, \cdots$ で $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ であり，$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ となるものがとれる．これを使って $C^r(U)$

にセミノルム $\| \|_{r,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ を

$$\|f\|_{r,k} = \max_{|\alpha| \le r} \max_{x \in K_k} |\partial_x^\alpha f|$$

と定義する．

補題 1.5 $C^r(U)$ は C^r 位相に関して完備である．

証明 C^r-関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1,2,\ldots}$ が C^r 位相に関してコーシー列ならば，これは任意のコンパクト部分集合 K 上で r 階までの微分を込めて一様収束するから，極限関数は K 上で C^r 関数となる．K は任意なのだからこれは極限関数が U 上で C^r 関数であることを意味する． □

次に C^∞ 位相については r と k を動かしたセミノルム系を考えるのである．これで $C^\infty(U)$ が位相線型空間となることは容易に分るであろう．前と全く同様に次が言える：

補題 1.6 $C^\infty(U)$ は C^∞ 位相に関して完備である．

多項式近似定理

U を $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の開集合としよう．$\mathfrak{P}$ を U 上の多項式の全体としよう．

定理 1.1 U が $\mathbb{C}^n$ の開集合の場合 $\mathfrak{P}$ は $Hol(U)$ の中で稠密である．U が $\mathbb{R}^n$ の開集合の場合 $\mathfrak{P}$ は $C^\infty(U)$ の中で稠密である．

この定理の証明は $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ と $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ とではかなり違ったものであるが，いずれの場合もワイエルシュトラス (Weierstrass) の近似定理と呼ばれる次の定理が基本になる．

定理 1.2 $C^0(U)$ を U 上の連続関数全体にコンパクト開位相を入れたものとする．すると，$\mathfrak{P}$ は $C^0(U)$ の中で稠密である．

1.2.4　形式的冪級数環の直積位相

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし $C^\infty(U)$ を上と同様に定義し，C^∞ 位相を入れておく，さらに $C^\infty(U)[[v]]$ を $C^\infty(U)$ の元を係数に持つ v に関する形式的冪級数の全体とする．一般の元は

$$f = f_0 + f_1 * v + \cdots + f_n * v^n + \cdots, \quad f_n \in C^\infty(U)$$

という姿に書かれる．

直積位相

一般に自然数の集合 $\mathbb{N}$ の各元 m に対して位相線型空間 V_m が与えられているとする．このとき**直積空間** $\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ とは

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots); \quad a_m \in V_m$$

全体のなす空間のことであり，**直和空間** $\Sigma_{m\in\mathbb{N}} V_m$ とはどこかの番号から先が全て 0 となるような

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots, 0, \cdots, 0, \cdots); \quad a_m \in V_m$$

の全体のことである．

有限個の空間の直積空間 $\prod_{k=1}^m V_k$ には普通**直積位相**なるものを入れるが，これは

$$\prod_{k=1}^m \{V_k \text{ の開集合}\}$$

の形に書かれる集合を開集合の基として作る位相である．$\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ に入れる**直積位相**とは m を任意として

$$\prod_{k=1}^m \{V_k \text{ の開集合}\} \times \prod_{k=m+1}^\infty V_k$$

の形に書かれる集合を開集合の基として作る位相である．

各 V_m が完備空間のときには $\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ も直積位相に関して完備である．

$a_n \in V$ で $\sum a_n z^n$ の形に書かれているが，z に関する収束性は全く問題にしていないとき，これを z に関する**形式的冪級数**と呼んで $V[[z]]$ のように書

く．形式的冪級数の全体に位相を入れるときには，これを単に $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ の集まりと見なして直積位相を入れる．

始めに与えた $C^\infty(U)[[v]]$ は $C^\infty(U)$ の無限個の直積空間 $\prod_{i=0}^{\infty} C^\infty(U)$ とみて，直積位相を入れる．

位相を入れるということは「収束する」ということの定義を与えることと同じだが，直積位相に関する収束とは各係数ごとの収束である．

定理 1.3 直積位相の入った $C^\infty(U)[[v]]$ は完備空間である．

1.3 関数空間を使うワイル代数の拡張

ワイル代数は自由テンソル代数の商代数だから自由テンソル代数の方を拡張して代数を広げるやりかたがまず思いつくであろうが，これはもう少し後で述べることにして，ここではこれとは違う拡張のしかたを述べる．

一般に非可換な代数では様々な計算公式を作ろうとすると，どうしても元の表示方法を一定にしておかないと話が進まないことが多い．

これは一般に**順序づけの問題**(ordering problem)[注10]と呼ばれているが，表示方法を一定にするだけだから，そのやりかたは色々考えられそうに思えるが実はそうではなく，基本関係式が交換子とか交換則を使って書かれている場合でないとうまくいかない[注11]．

しかしともかく代数の元の表示方法が一定にできたとする．すると，これはその代数と多項式の空間との間に線型同型が与えられたことを意味する．つまり，このようなことができれば，この代数は多項式の空間に通常とは違った積が定義されているものと見なすことができるのである．

以下しばらくは話を簡単にするために，2 変数のワイル代数で考えること

注10 そのように呼ばれていただけあって，昔はどの順序づけが良いかという論争が結構見られた．

注11 交換子が使われていても，うまくいくとは限らない．交換子を使って $[x,y] = -(x*y)^2$ のように関係式が与えられると，これは

$$y*x = x*y + x*(y*x)*y = x*y + x*\bigl(x*y + x*(y*x)*y\bigr)*y = \sum_{k=0}^{\infty} x^k*y^k$$

という超越的な関係式を意味してしまう．

にする．

ワイル代数の場合には順序づけのしかたは普通は次の3種類考える．このような表示が可能なのはすぐ気がつくであろう．

- **正規順序表示**(normal ordering)：これは $\sum a_{mn}u^m * v^n$ のように各項の中で u が左端に来るように整頓して書くやりかたである．
- **反正規順序表示**(anti-normal ordering)：これは $\sum a_{nm}v^n * u^m$ のように各項の中で v が左端に来るように整頓して書くやりかたである．
- **ワイル順序表示**(Weyl ordering)：これは $\sum a_{mn}u^m \odot v^n$ のように各項を対称積なるものを用いて整頓して書くやりかたである．

すぐに別の計算法を与えるので，対称積なるものの定義はここでは必要ない．

それぞれの順序表示でワイル代数は多項式の空間に線型同型となるのだが，積の公式はそれぞれ次のようになる：

- 正規順序表示: **ΨDO-積公式**(擬微分作用素積公式)

$$f(u,v) * g(u,v) = f\exp\{\hbar i(\overleftarrow{\partial_v}\circ\overrightarrow{\partial_u})\}g. \tag{1.8}$$

- 反正規順序表示: **$\bar{\Psi}$DO-積公式**

$$f(u,v) * g(u,v) = f\exp\{-\hbar i(\overleftarrow{\partial_u}\bullet\overrightarrow{\partial_v})\}g. \tag{1.9}$$

- ワイル順序表示: **モイヤル(Moyal)積公式**

$$f(u,v) * g(u,v) = f\exp\frac{\hbar i}{2}\left\{\overleftarrow{\partial_v}\overset{\odot}{\wedge}\overrightarrow{\partial_u}\right\}g. \tag{1.10}$$

ここで，$\odot$, $\bullet$, $\circ$ はいずれも多項式に定義される普通の可換積であるが，使っている順序表示を区別する目的で書き分けている[注12]．見慣れぬ記号が出てきたが，それは次節で解説することにする．ともかく積 $f*g$ の計算公式が具体的に与えられたのだから，これを利用して積の定義できる範囲を拡張しようというのである．

注12 $\odot$ という記号は(天体物理では太陽を表していて)おおげさすぎるので，あとのほうでは $f\cdot g$ になったり，全く書かないで，fg のようにする．

1.3.1 二項演算記号

A を完備な位相線型空間，A' をその中の稠密な部分空間とする．線型写像 $D : A \to A$ が**擬冪零**であるとは，任意の $a \in A'$ に対してある n があって $D^n a = 0$ となることである．

$(A, A', *_0)$ が A' を係数環とする**両側 A'-加群**であるとは，$(A', *_0)$ が係数体 $\mathcal{R}$ 上の結合代数であり，任意の A' の元 a に対して左右の積 $a*_0$, $*_0 a$ が A から A への連続線型写像に拡張できる場合を言う．これは，積 $*_0$ が A に拡張できるといっているのではないことに注意してほしい．つまり，$(A', *_0)$ は A の位相で位相代数になっているのではなく，単に左右の積 $a*_0$, $*_0 a$ が A の位相で連続となっているのみである．つまり，両側 A'-加群というのは代数的には開いた系なのである．

a, b, c のどれか二つが A' の元の時には結合律 $a *_0 (b *_0 c) = (a *_0 b) *_0 c$ が成立していることが連続性を使って容易に分かる．

演習問題 14 M_∞ を (∞, ∞) 行列 $(a_{ij})_{0 \le i,j < \infty}$ の全体とする．さらに，M_∞^0 を M_∞ の元 $(a_{ij})_{0 \le i,j < \infty}$ で十分大きな i, j に対して $a_{ij} = 0$ となるものの全体とする．さらに，M_∞^d を M_∞ の元 $(a_{ij})_{0 \le i,j < \infty}$ で $|i - j|$ が十分大きくなると $a_{ij} = 0$ となるものの全体とする．位相は行列の成分毎の収束をもって収束と定義する位相を入れておく．次のことが成り立つことを示せ：

(a) M_∞ は完備位相線型空間であり，M_∞^0 はその稠密な線型部分空間である．

(b) A, B のどちらかが M_∞^d の元ならば行列の積 $A * B$ は定義できる．どちらも M_∞^d の元ならば積 $A * B$ も M_∞^d の元である．

(c) A, B, C のどれか二つが M_∞^d の元ならば結合律 $A * (B * C) = (A * B) * C$ が成立する．

(d) A が M_∞^d の元ならば A を左，右から掛けるという写像 $A* : X \mapsto A * X$, $*A : X \mapsto X * A$ は M_∞ から M_∞ への連続線型写像である．

(e) M_∞^0 は両側イデアルである．

連続線型写像 $D : A \to A$ が両側 A'-加群 $(A, A', *_0)$ の**微分**であるとは $DA' \subset A'$ であり，どちらか一方が A' の元の時に

$$D(a *_0 b) = (Da) *_0 b + a *_0 (Db)$$

が成立することを言う．

例 1 u, v を $\mathbb{C}^2$ の普通の座標関数とし，$A = Hol(\mathbb{C}^2)$, $A' = \mathbb{C}[u, v]$ とする．積は普通の可換積とする．$D = \partial_u, D' = i\partial_v$ は互いに可換な擬冪零な微分である．

例 2 両側 A'-加群 $(A, A', *_0)$ において，$x, y \in A'$ で，$[x, y]_{*_0}$ が中心(center)の元となるものがあったする．$D = \mathrm{ad}(x)$, $D' = \mathrm{ad}(y)$ は $(A, A', *_0)$ の微分であり，$DD' = D'D$ である．しかし一般に擬冪零とは限らない．

同様に連続線型同型写像 $\alpha : A \to A$ が両側 A'-加群 $(A, A', *_0)$ の**同型写像**であるとは，α が $(A', *_0)$ から $(A', *_0)$ への同型写像となる場合を言う．

上のような $(A, A', *_0)$ の微分 D, D' で $DD' = D'D$ でが成立し擬冪零なものが与えられたとする．このような微分の組はいつもあるとは限らないし，あっても一意的ではない．

このとき，D, D' を使って定数 $\hbar \in \mathbb{C}$ に対して**モイヤル(Moyal)型の積**と呼ばれる新しい積を次の式で定義する([14] 参照):

$$f *_1 g = f e^{\hbar \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'}} g. \tag{1.11}$$

但し，$e^{\hbar \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'}} = \sum_{k \geq 0} \frac{\hbar^k}{k!} (\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'})^k$, であり $\leftarrow$, $\to$ はどちら側に作用するかを表している．つまり

$$f (\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'})^k g = D^k f *_0 {D'}^k g.$$

新しい積 $*_1$ も A' 上で結合律を満たし，$(A, A', *_1)$ も A' を係数環とする両側 A'-加群となり，D, D' は新しい両側 A'-加群 $(A, A', *_1)$ の微分となることが分かる．

演習問題 15 $*_1$-積の結合律を証明せよ(総和記号の練習になる)．また，任意の $f \in A'$ について，$f*_1$, $*_1 f$ は A から A への線型連続写像であることを示せ．

$D_1 : (A, A', *_0) \to (A, A', *_0)$ が微分で $[D_1, D] = [D_1, D'] = 0$ であるならば，$D_1 : (A, A', *_1) \to (A, A', *_1)$ も微分となる．同様に，$\alpha : (A, A', *_0) \to (A, A', *_0)$ が同型写像[注13]で，$[\alpha, D] = [\alpha, D'] = 0$ ならば，$\alpha : (A, A', *_1) \to (A, A', *_1)$ も同型写像となる．

注13 これがどのような定義であるかは想像にまかせよう．

補題 1.7 D, D', D_1, D_1' が互いに可換な $(A, A', *_0)$ の擬冪零な微分であるとする．積 $*_1$ を (1.11)で入れ，さらに積 $*_2$ を

$$f *_2 g = f e^{\hbar \overleftarrow{D_1} *_1 \overrightarrow{D_1'}} g$$

で定義すると，下のような公式が成立する：

$$f *_2 g = f e^{\hbar(\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'} + \overleftarrow{D_1} *_0 \overrightarrow{D_1'})} g.$$

これで $(A, A', *_2)$ も A' を係数環とする両側 A'-加群となる．

補題 1.7 の公式は次のような形にも書ける：

$$f e^{\hbar \overleftarrow{D_1} (e^{\hbar \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'}}) \overrightarrow{D_1'}} g = f e^{\hbar(\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'} + \overleftarrow{D_1} *_0 \overrightarrow{D_1'})} g. \tag{1.12}$$

これは次々に重ねてやることができる．$*$-積をすばやく暗算で計算するには左辺のように考えて計算するとよい[注14]．

補題 1.7 で $D_1 = -D$, $D_1' = D'$ と置けば，

$$f *_0 g = f e^{-\hbar \overleftarrow{D} *_1 \overrightarrow{D'}} g \tag{1.13}$$

も得られる．これは，最初の $*_0$ を後の $*_1$ を使って再構成できることを示している．特に $*_0$ が可換積でそこから出発して $*_1$ という非可換積が作られている場合等はこのことは重要な意味を持つ．しかし，$*_1$-積を可換積から作るやりかたは D, D' の取り方に依存するし，何通りもある．

$D_1 = -D'$, $D_1' = D$ のように置き，

$$\overleftarrow{D} \overset{*_0}{\wedge} \overrightarrow{D'} = \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'} - \overleftarrow{D'} *_0 \overrightarrow{D}$$

という記号を使えば，

$$f \hat{*} g = f e^{\hbar(\overleftarrow{D} \overset{*_0}{\wedge} \overrightarrow{D'})} g \tag{1.14}$$

も新しい A' を係数環とする両側 A'-加群となる．この積から元の積を得るには

$$f *_0 g = f e^{-\hbar(\overleftarrow{D} \overset{\hat{*}}{\wedge} \overrightarrow{D'})} g$$

注14 この計算は慣れるとかなり暗算が効くようになる．

とすればよい．

$(A, A', *)$ が両側 A'-加群において，A' の元 x, y で $[x, y] = -\hbar i$ なる関係をみたすものを，（積 $*$ に関して）互いに**正準共役**であると言う．このとき，$D = -\frac{1}{\hbar i}\mathrm{ad}(x)$, $D' = \frac{1}{\hbar i}\mathrm{ad}(y)$ は $(A, A', *)$ の微分であり，$[D, D'] = 0$ をみたす．A' が x, y の多項式全体のような場合には D, D' は擬冪零な微分ともなる．次の定理は重要である：

定理 1.4 上の仮定のもとで，新しい積

$$f *_0 g = f e^{-\frac{\hbar i}{2}(\overleftarrow{D} \overset{*}{\wedge} \overrightarrow{D'})} g$$

は可換積である．これを**逆モイヤル積公式**と呼ぶ．

話を多項式環の場合で整理しておこう．$C[u, v]$ を多項式環とし，普通の可換な積を fg のように何も書かないことで表示する．$D = i\partial_v$, $D' = \partial_u$ と置けば，これらは微分で $[D, D'] = 0$ である．**モイヤル積**とは

$$f * g = f e^{\frac{\hbar i}{2}\overleftarrow{\partial_v} \wedge \overrightarrow{\partial_u}} g$$

のように書かれる積のことである．（以後この書き方を採用する.）

この積は一方が多項式なら他方は C^∞ 関数でありさえすれば計算できる．**特に $(Hol(\mathbb{C}^2), \mathbb{C}[u, v], *)$ は両側 $\mathbb{C}[u, v]$-加群である**．これを特に**ワイル空間**と呼んでおく．

演習問題 16 逆モイヤル積公式で可換積を作れ．

可換な積は色々便利な面を持っている．第一に元の記述が一意的にできる．これは元の集団に位相を導入しようとするときに便利である．しかし，我々はそれ以上のどんな意義も可換性に求めてはいない．可換積を使った表示は元の表示を一意的にするための方便にすぎない訳で，それ以上のものではない．

つまり，ワイル代数というのは，多項式の空間にそれぞれ上のような積が定義された代数とみなすことができるのである．積の計算のしかたがこのように具体的に与えられると，それを手がかりにして積を拡張することができる．次のことにも注意しておこう：

命題 1.1 $u \to u+a,\ v \to v+b$ という置き換え(平行移動)は $(A, \cdot)$, $(A, A', *_0)$, $(A, A', *)$ の同型写像となる.

$\hbar$ を形式変数として扱う場合

これまでの話では $\hbar$ は正定数, または $\mathbb{C} - \{0\}$ を動くパラメーターであったが, 今度はこれが形式的変数として扱われる場合を考えよう. このような場合には $\hbar$ の代わりに ν を用いることにする.

ν を形式的変数として扱い, 何もかも ν の形式的冪級数として扱うと話は極めて楽になる. まず, $e^{\frac{2i}{\nu}uv}$ のような元は ν の形式的冪級数では書けないから登場しない.

上に述べた積公式はどれも ν で(前では $\hbar$ と書いているが)展開して ν^m の所の係数を見ると f, g に関して双線型の微分作用素であり, その階数の和はそれぞれの項で m である. 従って, $f * g$ は f, g が C^∞ でありさえすれば, ν の形式的冪級数として計算でき, しかも結合律をみたす. さらに, f, g の定義域が $\mathbb{C}^2$ とか $\mathbb{R}^2$ 全体である必要もない. そればかりか任意の開集合 U 上の C^∞ 関数に対して積が定義できる.

位相線型空間 B に対して B の元を係数にする ν の形式的冪級数

$$\sum b_k \nu^k, \quad b_k \in B$$

の全体を $B[[\nu]]$ とする. これは自然に線型空間となり, 集合としては B の無限個の直積 $\prod_k B$ なので, 位相は直積位相を入れる. B が位相空間として完備ならば $B[[\nu]]$ も完備となる.

さらに分配律, 結合律をみたす積 $(\sum b_k \nu^k) * (\sum_l b'_l \nu^l)$ が $B[[\nu]]$ に与えられているとし, 話を簡単にするためにこれまでと同様に ν は他のすべての元と可換(つまり center の元)と仮定する. $(B[[\nu]]; *)$ が ν を center の元として代数になっている場合を考えようとしているのである.

$(\sum b_k \nu^k) * (\sum_l b'_l \nu^l) = \sum_m c_m \nu^m$ と書かれるわけだが, ν が center の元だから B の元 b, b' に対して b, b' の積

$$b * b' = \pi_0(b, b') + \pi_1(b, b')\nu + \cdots + \pi_m(b, b')\nu^m + \cdots$$

が分かれば全て計算できる.

結合律が成立するということは全ての $m \geq 0$ に対して

$$\sum_{k+l=m} \pi_k(a, \pi_l(b,c)) = \sum_{k+l=m} \pi_k(\pi_l(a,b), c), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \quad (1.15)$$

が成立することである．

少し特別な場合として，$(B[[\nu]], *_0)$ を $A = A' = B[[\nu]]$ なる両側 A'-加群 $(A, A', *_0)$ と考えよう．

定義 1.3 $(B[[\nu]], *_0)$の微分Dが$D\nu = 0$をみたすときν-**微分**と言う．$(B[[\nu]], *_0)$の同型写像φが$\varphi(\nu) = \nu$をみたすときν-**同型**と言う．

上のような $(B[[\nu]], *_0)$ の ν-微分 D, D' で $DD' = D'D$ でが成立するものが与えられたとしよう．このとき，D, D' を使って**モイヤル型の積**と呼ばれる新しい積を(1.11)式(ただし $\hbar$ を ν と置く)で定義する．D, D' は必ずしも擬冪零ではないが，ν に関する形式的冪級数の中でしか計算していないから，これで定義になっている．しかも，$\hbar$ を使って述べたことは並行してそのまま成立する．

もし $D_1 : (B[[\nu]], *_0) \to (B[[\nu]], *_0)$ が ν-微分で $[D_1, D] = [D_1, D'] = 0$ をみたせば，$D_1 : (B[[\nu]], *_1) \to (B[[\nu], *_1)$ も ν-微分となる．同様に，$\alpha : (B[[\nu]], *_0) \to (B[[\nu]], *_0)$ が ν-同型写像で，$[\alpha, D] = [\alpha, D'] = 0$ ならば，$\alpha : (B[[\nu]], *_1) \to (B[[\nu]], *_1)$ も ν-同型写像となる．補題 1.7 と全く同様の公式が書けることは明らかであろう．

ν が形式的変数として扱われているときには新しい積は全ての元に対して定義され，結合律が成立しているので便利ではあるが，$e^{\frac{1}{\nu}D}$ のような元は考えられなくなるのでその分不便になる．

注意　$\hbar$ が形式的変数として扱われて ν と書かれているときには，すべての元が可換積を使って記述できる．この便利さのために ν が形式的変数の場合は理論が滑らかに見える．しかし，ν が形式的変数として扱われているものは物理理論とは見なされていない．$\hbar$ は微小とは言え数でないと物理は困るのである．

第一結合律定理

$\hbar$ を形式的変数として扱い，何もかも ν の形式的冪級数として扱うとそこでは結合律が成立していた．

このことを使って $\hbar$ が形式的変数ではなく，$\mathbb{C}-\{0\}$ を動くパラメーターとして扱われているときに結合律が成り立つ十分条件を一つ与えておこう：

次の定理を**第一結合律定理**と呼ぶが，証明は簡単であろう．

定理 1.5 $f(u,v), g(u,v), h(u,v)$ が $\hbar$ に関して実解析的であり，$\hbar=0$ まで定義できている関数とする．このとき $f*g, g*h, (f*g)*h, f*(g*h)$ が $\hbar=0$ まで含めて $\hbar$ に関して実解析的に定義されておれば $(f*g)*h=f*(g*h)$ が成立している．

上のように述べると簡単な定理だが，$\hbar$ に関して実解析的に定義されていることを一般的に調べるのは難しいから，これを調べるには結局実際に計算してみないといけないことが多い．

対合的反自己同型

ここで，$\iota u=u, \iota v=v, \iota i=-i$ と定義して，ワイル代数に自然に定義される対合的反自己同型(involutive anti-automorphism)ι と上に述べた積公式との関係について述べておこう．$\iota[u,v]=[\iota v, \iota u]$ だからワイル代数に対合的反自己同型を与えることは明白であろう．

補題 1.8 対合的反自己同型 ι は $Hol(\mathbb{C}^2)$ 上にも定義される．つまり，$f*g$ が定義されておれば，$\iota(g)*\iota(f)$ も定義され，$\iota(f*g)=\iota(g)*\iota(f)$ である．

$\iota(u*v)=v*u=u*v+\hbar i$ だから，正規順序表示で $u{\circ}v$ と書かれている元は $\iota(u{\circ}v)=u{\circ}v+\hbar i$ である．これは，$\iota(u{\circ}v)=u{\bullet}v$ だと言っても良い．一方ワイル順序表示では $\iota(uv)=uv$ である．次のことがワイル順序表示の良いところである：

命題 1.2 ワイル順序表示で $f{*}g$ が定義できれば，$\bar{g}{*}\bar{f}$ も定義でき，$\iota(f{*}g)=\iota g{*}\iota f$ である．しかも，$\iota(f)=\bar{f}$ である．ただし，$(\bar{f})(u,v)=\overline{f(u,v)}$ である．

1.3.2　同型写像の群

ここで ΨDO-積公式とモイヤル積公式の対称性の違いを考えておこう．ΨDO-積公式は u, v を入り混じさせる変換に対しては対称性がないのに対してモイヤル積公式ははるかに対称性が高い．次のことが，モイヤル積を使っているときの最大の利点ではあるのだが，同型写像が定義されている範囲等については少しぼかしている：

命題 1.3　$A \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して Φ^* を行列 A および，定ベクトルによる変換

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad A \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{1.16}$$

を使って u, v を u', v' に置き換える「置き換え」(引き戻し) とすると，Φ^* は $*$-積，$\cdot$-積共通の同型写像となる．

演習問題 17　モイヤル積公式を使って，命題 1.3 を確かめよ．さらにこのことは結局

$$\partial_{v'} \wedge \partial_{u'} = \partial_v \wedge \partial_u$$

となることだけから示されることを確かめよ．

これを利用すると

$$u^2 * f(u,v), \quad (uv) * f(u,v)$$

が計算できたとすれば，$(au^2 + bv^2 + 2cuv) * f(u,v)$ を計算するときには判別式 $D = c^2 - ab$ が $= 0, \neq 0$ に応じて

$$au^2 + bv^2 + 2cuv = \begin{cases} (\alpha u + \beta v)^2, & (D = 0) \\ c(\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, & (D \neq 0) \end{cases}$$

の形に変形し，$u' = \alpha u + \beta v$, $v' = \gamma u + \delta v$ に関するモイヤル積公式がそのまま使えることになる．

複素構造を使っているときには $z \to z + c$ なる置き換え，及び任意のユニタリー行列による引き戻しが同型写像となる．

$u \to u + at$, $v \to v + bt$ という同型写像の 1 径数群の無限小生成元は $\mathrm{ad}(\frac{1}{\hbar}(biu - aiv))$ で，上の同型写像は任意の $f \in Hol(\mathbb{C}^2)$ に対して

$$\exp\Big(t\mathrm{ad}\big(\frac{1}{\hbar}(biu-aiv)\big)\Big)f(u,v)=f(u+at,v+bt)$$

で与えられるが，後の節でやるように，積 $*$ を使って指数関数 $e_*^{\frac{ti}{\hbar}(bu-av)}$ が定義できる場合には

$$e_*^{\frac{ti}{\hbar}(bu-av)}*f(u,v)*e_*^{-\frac{ti}{\hbar}(bu-av)}=f(u+at,v+bt)$$

のようにも書かれる．

演習問題 18 $\mathrm{ad}(\frac{i}{\hbar}(bu-av))$ はワイル代数の微分であることを確かめよ．微分方程式の実解析的解の一意性を使って，$\exp\big(t\mathrm{ad}(\frac{1}{\hbar}(biu-aiv))\big)$ はワイル代数の同型写像になっていることを示せ．

次の定理は命題 1.3 をもう少し正確に述べたものであるが，これがモイヤル積公式を使っているときの特徴であり，ΨDO-積公式等を使っているときには成立しない：

定理 1.6 $\exp\Big(t\mathrm{ad}\big(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)\big)\Big)$ はワイル空間 $(Hol(\mathbb{C}^2),\mathbb{C}[u,v],*)$ の同型写像となり，同時に $\cdot$-積に関する同型写像にもなる．

一般に，$[a_{11}u+a_{12}v,\ a_{21}u+a_{22}v]=-\hbar i$ のとき，つまり $a_{11}u+a_{12}v$ と $a_{21}u+a_{22}v$ とが正準共役のとき $u'=a_{11}u+a_{12}v,\ v'=a_{21}u+a_{22}v$ なる置き換えはワイル空間 $(Hol(\mathbb{C}^2),\mathbb{C}[u,v],*)$ の同型写像となり，同時に $\cdot$-積に関する同型写像にもなる[注15]．

証明 $\exp\Big(t\mathrm{ad}\big(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)\big)\Big)$ が $\mathbb{C}[u,v]_*$ 上の次数を保つ同型写像となることは明らかだから，これが $Hol(\mathbb{C}^2)$ まで拡張できることを示す．

$$\mathrm{ad}(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv))\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c&-b\\a&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\qquad(1.17)$$

であるから，この行列を A と書いておけば $*$-積で書かれた多項式 $p_*(u,v)$ に対しては

$$\exp\Big(t\mathrm{ad}\big(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)\big)\Big)p_*(u,v)=p_*(e^{tA}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix})$$

となることが分かる．しかし，この表示をそのまま $\cdot$-積で書かれた多項式に用いて

$$\exp t\mathrm{ad}(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv))f(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix})=f(e^{tA}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix})$$

注15 この同型写像は任意の $p>0$ に対して後で述べる $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ 上の連続な線型同型も引き起こす．

のような書き方をして良いとはすぐには結論されない．そこで，以下のような手のこんだことをするのであるが，これが同型を考える時の標準的な論法となる．

まず，$u' = a_{11}u + a_{12}v$, $v' = a_{21}u + a_{22}v$ なる置き換えは可換環 $(Hol(\mathbb{C}^2); \cdot)$ から $(Hol(\mathbb{C}^2); \cdot)$ の上への位相同型を与えていることは明らかであろう．$[\partial_{v'}, \partial_{u'}] = 0$ であるから，これをもとにしてもモイヤル積公式で積を作ることができる．つまり

$$f \bar{*} g = f e^{\frac{\hbar i}{2}\partial_{v'} \wedge \partial_{u'}}$$

と定義することができる．すると $u' = a_{11}u + a_{12}v$, $v' = a_{21}u + a_{22}v$ なる置き換えは完備ワイル空間 $(Hol(\mathbb{C}^2); \bar{*})$ から $(Hol(\mathbb{C}^2); *)$ への同型を与える．$[u', v']_* = [u', v']_{\bar{*}} = -\hbar i$ であるから，$[u, v]_* = [u, v]_{\bar{*}} = -\hbar i$ も得られ，逆モイヤル積公式を使えば $*$-積からも，$\bar{*}$-積からも同じ可換積 $\cdot$ が得られる．これより，モイヤル積公式を考えれば積 $*$ と $\bar{*}$ とは全く同じものであることが分かる．□

多項式近似定理を使って，結局この同型写像は任意の $f \in Hol(\mathbb{C}^2)$ に対して

$$\exp t\mathrm{ad}(\frac{i}{2\hbar}(au^2 + bv^2 + 2cuv))f(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = f(e^{tA}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) \tag{1.18}$$

と書いて良いことが分かる．t に関する特異点はどこにも現れない．

上のことは係数を実数に制限して $SL(2, \mathbb{R})$ で考えれば

$$(C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+); \mathbb{C}[u, v, \hbar], *)$$

の同型を引き起こすことは明らかである．

これらの記号の使い方で分かるだろうが，モイヤル積公式の所で述べた対称積とはそこで使われた $\cdot$-積のことだと思える．しかし，対称積は $*$-積から定義できるものであることが大切なのである．

1.4 結合律の破れ

ワイル空間 $(Hol(\mathbb{C}^2), \mathbb{C}[u, v], *)$ の中では $\hbar > 0$ としているから $e^{\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)}$ のような元を考えることは当然許されている．しかし，このように $\hbar$ について，$\hbar = 0$ まで定義できない元を使い始めると第一結合性定理が使えなくなり，実際，色々なことが起こることをこの節で注意する．

1.4.1　真空

$\hbar$ が形式的変数でないときには $\varpi_{00}=2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$, $\bar{\varpi}_{00}=2e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ は積に対してかなり特殊な働きをする．$\varpi_{00}=2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ を点 $(0,0)$ に於ける**真空**(vacuum) と呼ぶ．$\bar{\varpi}_{00}=2e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ を点 $(0,0)$ に於ける**共役真空**(bar-vacuum) と呼ぶ．まず，モイヤル積公式で計算する次の計算をやってみてもらいたい．

演習問題 19 $v*e^{\frac{2i}{\hbar}uv}=0=e^{\frac{2i}{\hbar}uv}*u$,$u*e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}=0=e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}*v$ を示せ．

このように ϖ_{00} は左からの v を消してしまう働きをする．これは物理で良く使う真空 $|0\rangle$ に似ているのでこのように呼ぶことにしたのである[注16]．

モイヤル積公式では $u{*}v+v{*}u=2uv$ である．さらに $c^2-ab=-1$ だと $au^2+bv^2+c(u{*}v+v{*}u)=au^2+bv^2+2cuv$ は

$$au^2+bv^2+2cuv=2i(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v),\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

となるように因数分解される．すると $u'=\alpha u+\beta v$, $v'=\gamma u+\delta v$ は量子正準共役対だから，

$$au^2+bv^2+2cuv=2iu'v'=iu'*v'+iv'*u'$$

と書かれることが分かる．$u'v'$ は u,v に関するモイヤル積公式で使う可換積と思っても良いし，u',v' に関するモイヤル積公式で使う可換積と思ってもよい．モイヤル積公式で計算すると容易に

$$(\gamma u+\delta v)*2e^{\frac{i}{\hbar}2(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)}=0 \tag{1.19}$$

が分かる．$\varpi=2e^{\frac{i}{\hbar}2(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)}$ も**真空**と呼ぶ．

真空 $\varpi'_{00}=2e^{\frac{i}{\hbar}2u'v'}$ に対して $(au'+bv')*\varpi'_{00}=0$ となる 1 次式は au' のみであり，$\varpi'_{00}*(au'+bv')=0$ となる 1 次式は bv' のみである．従って，**真空を指定すれば量子正準共役対** (au',bv') **が** $ab=1$ **の不定性を除いてきまる．**

注16 物理の記号では $|0\rangle\langle 0|$ と書いているものらしい．

半逆元

物理の真空では $\frac{1}{u}(1-|0\rangle)$ という書き方は意味がないように思えるがここでは以下のような計算ができる．まず，次の計算をやってみてもらいたい：

演習問題 20 $u^{\bullet}=\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$, $u^{\circ}=\frac{1}{u}(1-e^{-\frac{2i}{\hbar}uv})$ とすると，モイヤル積公式で計算[注17]して

$$u^{\bullet}{*}u=1,\quad u{*}u^{\bullet}=1-\varpi_{00},\quad u{*}u^{\circ}=1,\quad u^{\circ}{*}u=1-\bar{\varpi}_{00},$$

同様に $v^{\circ}=\frac{1}{v}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$, $v^{\bullet}=\frac{1}{v}(1-e^{-\frac{2i}{\hbar}uv})$ とすると，

$$v^{\circ}{*}v=1,\quad v{*}v^{\circ}=1-\varpi_{00},\quad v{*}v^{\bullet}=1,\quad v^{\bullet}{*}v=1-\bar{\varpi}_{00},$$

となることをを示せ．

つまり，u,v は右逆元も左逆元も持っている[注18]のである．$\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$ などは $u=0$ の所に特異点があるのではなく，$Hol(\mathbb{C}^2)$ の元である．

結合律に慣れすぎていると

$$u^{\bullet}=u^{\bullet}*(u{*}u^{\circ})=(u^{\bullet}{*}u)*u^{\circ}=u^{\circ}$$

となりそうに思えるだろうが，事実 $u^{\bullet}-u^{\circ}=-\frac{2i}{u}\sin(\frac{2}{\hbar}uv)$ であり，これは 0 ではないのだから，上のことはワイル空間 $(Hol(\mathbb{C}^2),\mathbb{C}[u,v],*)$ の中では**結合律は破れている**と素直に考えるべきである．

半逆元は一意的ではない．$v^{\circ}{*}v=1, v{*}v^{\circ}=1-\varpi_{00}$ であるが $\bar{\varpi}_{00}{*}v=0$ だから，$(v^{\circ}\pm\bar{\varpi}_{00}){*}v=1$ となって，これも半逆元となる．しかも，$v{*}(v^{\circ}\pm\bar{\varpi}_{00})=1-\varpi_{00}\pm\bar{\varpi}_{00}$ となる．

これらの計算は u,v を $u-a, v-b$ に平行移動しても変わらないから，$\varpi_{a,b}=2e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)(v-b)}$ 等と置けば，

$$(v-b)*\varpi_{a,b}=0=\varpi_{a,b}*(u-a),$$
$$(u-a)*(u-a)^{\bullet}=1-\varpi_{a,b}=(v-b)^{\bullet}*(v-b)$$

注17 この計算のとき，$\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})=\frac{1}{u}-\frac{1}{u}e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ として別々に計算するのは $\frac{1}{u}$ という $Hol(\mathbb{C})$ に入っていない元を使ってしまうので正しくない．$\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$ は収束冪級数に展開して考えるべきものである．

注18 正確には $u^{\bullet}$ は u の**左逆元**, u° は u の**右逆元**と呼ぶ．

等が成立する.

ΨDO-積公式を使っても「真空」のような元は現れ,

$$v{*}e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}=v{\circ}e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}+\hbar i\,\frac{i}{\hbar}\,v{\circ}e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}=0$$

である. 同様に $e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}*u=0$ である. あとで分かること(cf.(3.30))だが, $e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}=\varpi_{00}$ である. 大切なことは, 我々はこれを**真空** ϖ_{00} **のワイル順序表示が** $e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ **で, 正規順序表示が** $e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ **であると考えていることである.**

しかし $f(u){*}g_\circ(u,v)=f(u){\circ}g_\circ(u,v)$ であるから $u{*}g_\circ(u,v)=0$ となるような $g_\circ(u,v)\neq 0$ は存在しないと思われる[注19].

全く同様に $\bar{\Psi}$DO-積公式を使っても「真空」のような元は現れ,

$$u{*}e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}=u{\bullet}e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}+\hbar i\,\frac{i}{\hbar}\,u{\bullet}e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}=0$$

である. あとで分かること(cf.(3.30))だが, $e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}=\bar{\varpi}_{00}$ である.

定義されている $*$-積と, 多項式を書くために使っている普通の可換な積との関係を考えると, 普通の可換な積は元の表示方法を一定にするという役割を負っているだけのいわば補助線だったのである. これらの例で分かるように, **使っている積公式に応じて計算できる範囲がかなり違ってくる.**

1.4.2 ΨDO-積公式 vs モイヤル積公式

これまでは $*$-積をおもに普通の関数空間にモイヤル積の入ったものとして扱って来た. しかし "同じ" $*$-積は別の可換積を使っても表示できる. 例えばモイヤル積の代わりに ΨDO-積公式 (1.8)を使っても表すことができた. 当然だが,

$$u{*}v=u{\circ}v,\qquad v{*}u=u{\circ}v+\hbar i$$

であり, $[u,v]=-\hbar i$ である. $\mathbb{C}[u,v,\hbar]$ に定義される代数としては, モイヤル積公式を使ったものも, ΨDO-積公式を使ったものも同型となっている.

注19 これは「どの範囲で」ということを明確にしないと意味がない. 超関数まで使えば $u\delta(u)=0$ である.

前に述べたように $f{*}g$ は f, g のどちらかが多項式ならば定義でき，無論 h が多項式，または f,g が多項式ならば分配律 $(f+g){*}h = f{*}h+g{*}h$, $h{*}(f+g)=h{*}f+h{*}g$ を満たす．結合律 $f{*}(g{*}h)=(f{*}g){*}h$ もどれか二つが多項式ならば成立する．

少しいろいろな積公式を使って計算する練習をしてみると，まずモイヤル積公式で

$$e^{aiu}{*}\big(f(u,v){*}e^{biv}\big)=\big(e^{aiu}{*}(f(u,v)\big){*}e^{biv}=e^{aiu}f(u-\frac{\hbar b}{2},\ v+\frac{\hbar a}{2})e^{biv}$$

である．

補題 1.9 モイヤル積公式での計算では $(su+tv)_*^m=(su+tv)^m$ である．

ΨDO-積公式の特徴は

$$f(u)*g(u,v)=f(u)\circ g(u,v),\quad f(u,v)*g(v)=f(u,v)\circ g(v)$$

となることであり，積 $f*g$ を定義するだけなら f が v に関して，あるいは g が u に関して多項式になっているだけで良い．

$*$-積の存在や結合律は ΨDO-積公式の方が証明しやすいこともある．たとえば

$$f(u){*}(g_\circ(u,v){*}h(v))=f(u)\circ g_\circ(u,v)\circ h(v)=(f(u){*}g_\circ(u,v)){*}h(v) \tag{1.20}$$

のような積はいつでも定義でき，結合律も成立している．この場合 $g_\circ(u,v)$ は $\circ$-積で書かれているとしているが，正規順序表示をしたときに $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元として表示されるものなら何でも良い．

したがって，$*$-積で書いたときに同じ元を表すように $g_\circ(u,v)$ を $\cdot$-積を使って $g_\circ(u,v)=\tilde{g}_\cdot(u,v)$ のように書き直すことができれば，

$$f(u)*\big(\tilde{g}_\cdot(u,v)*h(v)\big)=\big(f(u)*\tilde{g}_\cdot(u,v)\big)*h(v)$$

のような積はいつでも定義でき，結合律も成立する．しかし，積の結果は他の表示では発散してしまって正規順序表示しか持たない元になっている可能性はある．この結合律を **ΨDO-型結合律**と呼んでおこう．

ΨDO-積公式の代わりに，それと対称な積公式($\bar{\Psi}$DO-積公式)

$$f(u,v)*g(u,v)=fe^{-\hbar i\overleftarrow{\partial_u}\bullet\overrightarrow{\partial_v}}g$$

を使うと，$u*v=u{\bullet}v-\hbar i,\quad v*u=u{\bullet}v$ となり，やはりワイル代数を定義する．

$\bar{\Psi}$DO-積公式 (1.9)を使って考えれば，すべてが ΨDO-積公式の場合と対称的に計算され，

$$f(v)*(g_\bullet(u,v)*h(u))=f(v){\bullet}g_\bullet(u,v){\bullet}h(u)=(f(v)*g_\bullet(u,v))*h(u)$$

のような積はいつでも定義でき，結合律も成立している．これを **$\bar{\Psi}$DO-型結合律**と呼んでおく．

結合律の破れとの交流

結合律が破れていては不便だから ϖ_{00} のような元は積極的に 0 と考えて，つまり，ϖ_{00} で生成する両側イデアルでの閉包で割った商代数で考えれば良さそうに思えるかもしれない．しかし，これはうまくいかないことを説明しよう．以下の説明は後で述べる定理 2.4 の証明にもなっているのである．

上の計算から，ϖ_{00} で生成する両側イデアルでの閉包で割った商代数で考えると u,v は可逆元としなければならない．そうすると $\bar{\varpi}_{00}$ も 0 としなければならない．

一方，u,v の代わりに $u'=u-a, v'=v-b$ を用いても上のことは全く同様に成立する．すると次の演習問題をやってみれば $e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)(v-b)}$ も 0 と思わなくてはいけなくなる．

演習問題 21 テイラー展開公式を用いて

$$(e^{\frac{b}{\hbar}u}*\varpi_{00})*e^{\frac{a}{\hbar}v}=e^{\frac{b}{\hbar}u}*(\varpi_{00}*e^{\frac{a}{\hbar}v})=2e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)(v-b)}$$

を示せ．

演習問題 22 任意の $b\in\mathbb{C}$ に対して

$$\Big(\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}u(v-b)})\Big)*u=1,\quad u*\Big(\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}u(v-b)})\Big)=1-2e^{\frac{2i}{\hbar}u(v-b)}$$

を示せ．

上と同じ議論で $u-a, v-b$ も可逆としなければならなくなる．多項式程度のことを考えているときにはこれで逆に割算が自由になり，関数体が出てくるからかえって良さそうに見えるのだが，我々は位相を入れて考えており，ϖ_{00} で生成する両側イデアルの**閉包**で割った商代数を考えているのである．

この商代数の中では $u^\bullet - u^\circ = -\frac{2i}{u}\sin(\frac{1}{\hbar}uv) = 0$ としなければならないのだから

$$u*(\frac{1}{u}\sin(\frac{2}{\hbar}uv)) = \sin(\frac{2}{\hbar}uv) + i\cos(\frac{2}{\hbar}uv)) = 0$$

としなければならなくなる．

さらに，この商代数でも対合的反自己同型 ι が定義されていたから結局 $\sin(\frac{1}{\hbar}uv) = 0, \cos(\frac{1}{\hbar}uv) = 0$ とすることになる．すると

$$1 = \sin^2(\frac{1}{\hbar}uv) + \cos^2(\frac{1}{\hbar}uv) = 0$$

としなければならなくなる．つまり，**この商代数は0のみからなる代数に崩壊してしまうのである．**

同様のことは，何らかの理由で u に対して逆元 u^{-1} を考えるときにも起こる．たとえば「u の動く範囲を $\mathbb{C}-\{0\}$ に制限している」ということを代数的に述べようとすれば「u^{-1} を考える」と言うしかないであろう．

結合律が成り立てば，$u^\bullet = u^{-1} = u^\circ$ のはずだから，無理に結合律を守ろうとすると $e^{\frac{2i}{\hbar}u(v-b)}$ のような元はすべて0としてしまわないといけない．そうすると上と同じ議論で代数は全部潰れてしまうのである．

明らかにこの推論の奇妙さは結合律を優先させるために，事実0でないものを0と置いてしまったために起こっている．このことが，自由テンソル代数を関係式イデアルの閉包で割るときにも起ることがあるのである．

このからくりは次の章で詳しく考えるが，上で述べていることは $u^\bullet$ と u° **とか，u^{-1} と $e^{\frac{2i}{\hbar}u(v-b)}$ のような元は結合律をみたす代数の中には同居できない**ということのみである．

我々はどこかで「$u^\bullet$ を採用しているのだから u° は排除する」といった線引をしなくてはいけなくなるのだが，そのための理論は見当らないので，今のところは手探りでこれを行わなければならない．どうやらこの線引はかなり

自由に行えるものらしい．むしろ我々はこういうあぶない元達も視野に置いて，交流することを考えるべきであろう．彼らも結構 amenable なのである．

演習問題 23　モイヤル積の計算で $e^{\frac{2i}{\hbar}uv} * e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ は発散することを示せ[注20]．さらに ΨDO-積公式を用いて

$$e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v} * e_{\circ}^{\pm\frac{i}{\hbar}u\circ v} = e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}$$

となることを確かめよ．

以下の公式は次章で 2 次の指数関数との関係がはっきりしてから分かることだが，

$$\varpi_{00} * \varpi_{00} = \varpi_{00}, \qquad \bar{\varpi}_{00} * \bar{\varpi}_{00} = \bar{\varpi}_{00}, \qquad \varpi_{00} * \bar{\varpi}_{00} = \text{発散} \quad (1.21)$$

である．しかし，これと前に述べた $e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v} = \varpi_{00}$ という**事実**と演習問題 23 で述べたことを突き合わせてみると何かつじつまが合わないように思えるであろう．全部合わせると

$$\varpi_{00} * \varpi_{00} = \varpi_{00}, \quad \varpi_{00} * e_{\circ}^{\pm\frac{i}{\hbar}u\circ v} = \varpi_{00} = e_{\circ}^{\pm\frac{i}{\hbar}u\circ v} * \varpi_{00}$$

と言っているからである．すると $e_{\circ}^{-\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ もかなり特殊な元なのだがこれは一体何であろうか．(3 章最後の注意参照.)

演習問題 24　$u^{-1} * e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ は発散するが，$a \neq 0$ の時

$$u^{-1} * e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)v} = \frac{1}{2u-a} e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)v}, \quad e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)v} * u^{-1} = a^{-1} e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)v}$$

を示せ[注21]．

$e^{\pm\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元であり，$(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ に関して連続にもなっている．したがって，例えば次のような元も収束する：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh t} e^{(\tanh t)uv} dt \in Hol(\mathbb{C}^2). \qquad (1.22)$$

注20　モイヤル積の計算だけでこれを出すのはかなり大変である．3 章，演習問題 3 参照．

注21　これはモイヤル積公式で計算すると $u - a$ が十分 0 に近いときしか収束しないものになるが，ともかく収束している領域があり，さらに $u * \frac{1}{2u-a} e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)v}$ を計算すると $= e^{\frac{2i}{\hbar}(u-a)v}$ となることを論拠にしている．したがってこのようなことを許すように定義を拡張して考えないといけない．6.2 節参照．

後で述べるがこれは uv に逆元が二つあることを意味するのである.

これも後で述べる定理(定理 2.5 参照)だが 1 次式の指数関数 e^{au+bv} のようなものは結合代数の中に安全に埋め込んで考えられるものであるが，2 次式の指数関数を考え始めると，上のような奇妙なことが起こってくるのである.

このような現象は，結合律が成立しないような所にまで計算を進めるからではあるが，微積分の計算をやっている以上こういう計算をやってはいけないという理由にはどこにもないのだからこういう奇妙なものも事実として許容しなければいけないのである.

第2章
∗-指数関数(I)

ずいぶん前の話だが，ある国からの留学生の試験で,「微積分なるものを勉強して量子力学を理解したい」と出願理由書に書いていた学生がいた．日本側の反応はかなり冷やかで,「高校でも教えていることが分かってない」というわけで不採用だったように記憶している．しかし，我々の態度はまさしくこの留学生と同じなのである．我々は，量子力学なるものは，微積分の代数の中に全部書いてあると思っているのである．

知能が十分発達した宇宙人がいたとすると，彼らは地球人が π という数を使っていることを知っただけで地球人の幾何学の全貌を知ってしまうであろうし，また地球人が e という数を使っていることを知っただけで地球人の解析学の全貌を知ってしまうであろう．そういうことが言われるくらい π は図形に関するあらゆる場所に登場し，e は計算を主体とする数学のあらゆる場所に登場する．

第 1 章で登場した奇妙な元達はすべて 1,2 次式の指数関数に関係している．この章では 1 次式の指数関数をまず定義し，これをもとにして様々な表示の間の相互変換を考える．それと同時に位相についての用語が足りなくなってきたのでそれも補い新しい関数空間を作る．

2.1　1次式の指数関数

∗-積を用いた指数関数 e_*^{tf} を一般的に定義するのは難しい．$\sum \frac{t^k}{k!}(f*)^k$ が収束するなら問題ないが，こうなるのは e_*^{su+tv} のような特殊な元の場合だけである．まずそこから始める．

2.1.1　指数関数 e_*^{su+tv}

e_*^{su} を $e_*^{su} = \sum \frac{1}{k!}(su*)^k$ とする．これは方程式 $\frac{d}{dt}f_t(u) = u * f_t(u)$ の初期値 $f_0(u) = 1$ の解として定義しても同じことである．これを **∗-指数関数**(∗-exponential function)と呼ぶ．この場合 $e_*^{su} = e^{su}$ である．e_*^{tv} についても同様である．

前章で述べた3種類の積公式について $e_*^{su} * e_*^{tv}$ はそれぞれ次のように与えられる：

- ΨDO-積公式では $e_*^{su} * e_*^{tv} = e_\circ^{su+tv}$.
- $\bar{\Psi}$DO-積公式では $e_*^{su} * e_*^{tv} = e^{-\hbar ist} e_\bullet^{su+tv}$.
- モイヤル積公式 (1.10)では $e_*^{su} * e_*^{tv} = e^{-\frac{\hbar ist}{2}} e_\cdot^{su+tv}$.

ここで ∘, •, · は普通の可換積だが，それぞれの積公式の時に使っている可換積を区別するために用いている．

微分方程式などを考えたときには解がどのように書かれるかは元の表示方法によって変ってくるし，ある種の元は特定の順序表示でないと意味を持たないといったことが起こる．

補題 2.1 ∗-指数関数 $e_*^{\alpha u+\beta v}$ は (u,v) に関する正規順序表示では

$$e_*^{\alpha u+\beta v} = e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta} e_\circ^{\alpha u+\beta v}$$

のように表示される．それに対してワイル順序表示では $e_*^{\alpha u+\beta v} = e_\cdot^{\alpha u+\beta v}$ となる．これより特に $e_*^{su} * e_*^{tv} = e^{-\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta} e_*^{su+tv}$ も分かる．

証明　$e_*^{t(\alpha u+\beta v)}$ は正規順序表示では微分方程式

$$\frac{d}{dt}f = (\alpha u + \beta v) * f = (\alpha u + \beta v)\circ f + \hbar i\beta\partial_u f \tag{2.1}$$

の初期値 1 の解として定義される．ワイル順序表示では右辺は

$$(\alpha u + \beta v)\cdot f + \frac{\hbar i}{2}(\beta\partial_u - \alpha\partial_v)f$$

のように計算される．t に関して実解析的な解は一意的[注1]だから，$x = \alpha u + \beta v$ と置き，$f = f_t(x)$ と置いて解を捜しても良いわけだから，そのようにすると，微分方程式 (2.1)は

$$\frac{d}{dt}f_t(x) = xf_t(x) + \hbar i\alpha\beta f_t'(x)$$

と書き換えられる．これより，$f_t = C(t)e^{tx}$ と置き定数変化法で解いて

$$f_t(x) = e^{tx+\frac{1}{2}\hbar i\alpha\beta t^2}$$

が分かる．つまり，$e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta t^2}e_\circ^{t(\alpha u+\beta v)}$ である．

ワイル順序表示では微分方程式 (2.1)は単純に

$$\frac{d}{dt}f_t(x) = x\cdot f_t(x)$$

となるだけである．したがって，$e_\cdot^{t(\alpha u+\beta v)}$ が得られる．$t=1$ と置いて補題が得られる．　□

集合 $\{ce_\cdot^{\alpha u+\beta v};\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ c\in\mathbb{C}-\{0\}\}$ は $*$-積に関して群をなす．これを**ハイゼンベルグ群**と呼ぶ．積はモイヤル積公式で次のように与えられる：

$$ce_\cdot^{au+bv} * c'e_\cdot^{\alpha u+\beta v} = cc'e^{\frac{\hbar i}{2}(b\alpha - a\beta)}e_\cdot^{(a+\alpha)u+(b+\beta)}.$$

全く同様集合 $\{ce_\circ^{\alpha u+\beta v};\alpha,\beta\in\mathbb{C},\ c\in\mathbb{C}-\{0\}\}$ は $*$-積に関して群をなす．積は ΨDO 積公式で次のように与えられる：

$$ce_\circ^{au+bv} * c'e_\circ^{\alpha u+\beta v} = cc'e^{\hbar ib\alpha}e_\circ^{(a+\alpha)u+(b+\beta)}.$$

上の二つの群が同型なことは $*$-積による表示で見ればどちらも

$$ce_*^{au+bv} * c'e_*^{\alpha u+\beta v} = cc'e^{\frac{\hbar i}{2}(b\alpha - a\beta)}e_*^{(a+\alpha)u+(b+\beta)}$$

であることから分かる．

注1　これの証明は次節定理 2.1 参照.

ΨDO-積公式は任意の正準共役対 (u',v') を用いて定義できるが，結果は無論，用いている正準共役対に依存する．したがって計算する元に応じて都合の良い表示を使って良いのだが，対応関係が明確でないと何を計算したのか分からなくなる．ここでは補題 2.1 に注目しておこう．

補題 2.2 一方もし $u'=\alpha u+\beta v$, かつ $v'=\gamma u+\delta v$ が量子正準共役対ならば (u',v') に関する正規順序表示では当然 $e_*^{tu'}=e_{\circ'}^{tu'}$ となる．($\circ'$ は (u',v') に関する正規順序表示であることを示す記号である.)

方程式 $\frac{d}{dt}f_t=H*f_t$ の一般論

ワイル空間 $(Hol(\mathbb{C}^2),\mathbb{C}[u,v];*)$ において，$H\in Hol(\mathbb{C}^2)$ に対して方程式

$$\frac{d}{dt}f_t=H*f_t,\quad f_0=f\qquad(\text{左方程式})\tag{2.2}$$

を考える．これは，一般には微分方程式ではないが H が多項式の場合には微分方程式であって，**発展方程式**と呼ばれる．発展方程式は状態の時間発展を記述していると考えられる式なので，数学を使う自然科学の至るところに登場する．(2.2)の初期値 $f_0=1$ の実解析的解(存在しておれば)を e_*^{tH} と書き，**$*$-指数関数**($*$-exponential function)と呼ぶ．

しかし，これはいつでも方程式

$$\frac{d}{dt}g_t=g_t*H,\quad g_0=g\qquad(\text{右方程式})\tag{2.3}$$

と対にして考えるべきものである．

$H*$, $*H$ が連続の場合

H が多項式の場合には左右の方程式は $H*f_t$, f_t*H をモイヤル積公式で計算すると (2.2), (2.3)は線型の偏微分方程式となる．そうならない場合でも，$H*$, $*H$ が $Hol(\mathbb{C}^2)$ から自分自身への連続線型写像に拡張できる場合というのが好都合なので，その場合に話を限って考える[注2]．

定理 2.1 $H*$, $*H$ が連続の場合には，(2.2)または(2.3)の方程式の t に関して

注2 補題 2.12 より，$H\in\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ ならばこの条件を満たしている．

実解析的な解は存在すれば一意的である．

証明　方程式は線型だから，一意性を得るには初期関数 $f_0(u,v)=0$ の実解析的解 (u,v を任意に固定したとき t に関して実解析的となるようなな解)が 0 のみであることを示せば良い．これはお定まりのやり方である．

左右の方程式の両辺で $t=0$ とすることにより $\frac{d}{dt}f_t|_{t=0}=0$ が分かる．さらに次々に両辺を t で微分して $t=0$ とすることにより $\frac{d^k}{dt^k}f_t|_{t=0}$ も分かる．これより，t に関して実解析的である限り解は 0 のみであることが分かる．この証明方法で，H に対する条件は，$H*$, $*H$ が連続線型写像になるから

$$\frac{d^k}{dt^k}(H*F)=H*\frac{d^k}{dt^k}F,\quad \frac{d^k}{dt^k}(G*H)=(\frac{d^k}{dt^k}G)*H$$

となるという所(前節 1.2.2 参照)に使われている．□

この方程式の解は一般に存在するとは限らないし，存在したとしても具体的な解の形は H に応じて計算で求めなければならない．上の方程式の解の存在は一般にかなり限定された初期値の時にのみ分かる．

これを用いて $*$-積を拡張することを考えよう．まず，$H\in\mathbb{C}[u,v]$ で t に関して実解析的な解 e_*^{tH} が $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元として求まっているものとする．このとき，積 $e_*^{tH}*f(u,v)$ を方程式 (2.2)の初期値 f の t に関して実解析的な解として定義する．無論 f によっては解が無い場合もある．同様に $f(u,v)*e_*^{tH}$ は右方程式(2.3) の初期値 f の実解析的な解として定義する．

次のような結合律が成立する：

定理 2.2　$e_*^{tH}*f(u,v)$ が t に関して実解析的に定義できていれば，任意の多項式 $p(u,v)$ に対して $e_*^{tH}*(f(u,v)*p(u,v))$ も t に関して実解析的に定義でき，

$$\big(e_*^{tH}*f(u,v)\big)*p(u,v)=e_*^{tH}*\big(f(u,v)*p(u,v)\big)$$

が成立する．

同様に，$f(u,v)*e_*^{tH}$ が実解析的に定義できておれば，$\big(p(u,v)*f(u,v)\big)*e_*^{tH}$ も t に関して実解析的に定義でき，

$$p(u,v)*\big(f(u,v)*e_*^{tH}\big)=\big(p(u,v)*f(u,v)\big)*e_*^{tH}$$

が成立する．

証明　$e_*^{tH}*f(u,v)$ が定義されていて p が多項式だから，$(e_*^{tH}*f(u,v))*p(u,v)$ は定義されている．$*p(u,v)$ が C^∞（$K=\mathbb{C}$ の場合はコンパクト開）位相に関して線型連続写像であるから，左辺を t で微分すると，$\frac{d}{dt}$ と $*p$ の演算は交換して良いわけで，$(H*(e_*^{tH}*f(u,v)))*p(u,v)$ となる．ところが，H, $p(u,v)$ が多項式だから，これは $H*((e_*^{tH}*f(u,v))*p(u,v))$ と同じである．つまり，$(e_*^{tH}*f(u,v))*p(u,v)$ は t に関して実解析的で，補題 2.12 より，

$$\frac{d}{dt}((e_*^{tH}*f(u,v))*p(u,v))=H*((e_*^{tH}*f(u,v))*p(u,v))$$

を満たす．初期値は $f(u,v)*p(u,v)$ である．従って，積の定義より $(e_*^{tH}*f(u,v))*p(u,v)=e_*^{tH}*(f(u,v)*p(u,v))$ である．□

証明のポイントは $*p$ が線型連続写像で $\frac{d}{dt}(f*p(u,v))=(\frac{d}{dt}f)*p(u,v)$ となるということである．したがって，*-積がどの程度の位相線型空間で定義されるかがはっきりすれば上の定理は様々に拡張される．

解の一意性より直ちに次が得られる：

系 2.1 $H*$ が連続の場合には，左方程式 (2.2)の t に関して実解析的な解が $t\in\mathbb{R}$ で存在するものとし，それを e_*^{sH} とすると，指数法則

$$e_*^{sH}*e_*^{tH}=e_*^{(s+t)H},\quad e_*^{sH}*e_*^{sc}=e_*^{s(H+c)},\ c\in\mathbb{C}$$

が成立する．さらに，任意の多項式 $p(u,v)$ について

$$e_*^{tH}*(e_*^{sH}*p(u,v))=e_*^{(s+t)H}*p(u,v),$$
$$(p(u,v)*e_*^{tH})*e_*^{sH}=p(u,v)*e_*^{(s+t)H}$$

も成立する．

証明　$\frac{d}{ds}e_*^{(s+t)H}=H*e_*^{(s+t)H}$ であるが，これの初期値は e_*^{tH} である．従って積の定義により，$e_*^{sH}*e_*^{tH}=e_*^{(s+t)H}$ である．次の等式も同様である．実解析的な解の一意性より第三の等式が得られる．□

注意　後の方(cf. 定理 2.5)で関数空間 $\mathcal{E}_{q+}(\mathbb{C}^2)$ を定義するが，上の証明から分かるように，$e_*^{tH}\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ が分かるときには定理 2.5, 補題 2.12 により系 2.1 の $p(u,v)$ を任意の $f\in\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $0<p<2$, に置き換えてよい．

完備ワイル空間では複素共役が定義されているからそれを使って次が分かる：

補題 2.3 左方程式 (2.2)の初期条件 f_0 の解が分かったものとしてそれを f_t とすると $\bar{f}_t$ は右方程式 (2.3)初期条件 $\bar{f}_0$ の解となる．

さらに，補題 2.3 より次のことが分かる：

系 2.2 $\bar{H}=-H$ のとき，左方程式の初期条件 f_0 の解が分かったとしてそれを f_t とする．もし，$\bar{f}_{-t}*f_t$ が定義できるならば次のような保存則 $\bar{f}_{-t}*f_t=\bar{f}_0*f_0$ が成立する．

$H*e_*^{tH}$, $e_*^{tH}*H$ はともに同じ微分方程式の初期値 H の解であることから，

$$H*e_*^{tH}=e_*^{tH}*H \tag{2.4}$$

であることが分かる．これより，次のことが分かる．

系 2.3 H が多項式の場合に，左方程式(2.2)の t に関して実解析的な解が $t\in\mathbb{R}$ で存在するものとし，それを e_*^{tH} とすると，これは右方程式 (2.3)の解ともなる．つまり，初期条件 1 の時の左，右の方程式の t に関して実解析的な解は存在すれば一致する．

$(Hol(\mathbb{C}^2),\mathbb{C}[u,v],*)$ は両側 $\mathbb{C}[u,v]$-加群だから，e_*^{tH} が $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元として定義できているときには，任意の多項式に対して $e_*^{tH}*p(u,v)$, $p(u,v)*e_*^{tH}$ も定義できているし，多項式 p,q に対して結合律 $(p*e_*^{tH})*q=(p*e_*^{itH})*q$ が成立している．

しかし，$e_*^{itH}*f(u,v)$ の存在が分かっただけで，$(e_*^{tH}*p(u,v))*f(u,v)$, $(p(u,v)*e_*^{itH})*f(u,v)$ のようなものが存在するのかどうかは不明である．また，存在したとしても $(p(u,v)*e_*^{tH})*f(u,v)=p(u,v)*(e_*^{tH}*f(u,v))$ のような結合律はあるのだろうか？ このような場合使えるのはこれまでのところ前章の第一結合律定理だけである．

フーリエ変換, ラプラス変換を使う関数の拡張

一般に指数関数が与えられればそれをもとにフーリエ(Fourier)変換，ラプラス(Laplace)変換を使って様々な関数が作られる．このやり方で $*$-積の意

味での意味での関数を定義しよう.

台がコンパクトな $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $\hat{f}(t)$ に対してそのフーリエ変換は

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itz} \, d\!\!\!{}^-t$$

であたえられる. ただし $d\!\!\!{}^-t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}dt$ である. 項別微分ができるから $f(z)$ は整関数となる.

e_*^{itH} が $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元として定義されていて t に関して連続になっている場合, 演算子的関数[注3] $f_*(H)$ を

$$f_*(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e_*^{itH} \, d\!\!\!{}^-t \tag{2.5}$$

で定義する. $Hol(\mathbb{C}^2)$ がフレッシェ空間なので, 右辺が定義できることは明らかであろう(1.2.2 節参照). $\hat{f}(t)$ の台がコンパクトでなくても右辺が定義できれば上のように書くことにする. 古典的関数は序文で述べたように機能であるから非可換な場合にも使える(ブルバキ的関数は決してこのようには使えない!) のである.

2.1.2　二つの逆元

1 次式についてだけだが, $*$-積の意味での指数関数が定義できているので, これをもとにして $*$-積を計算する公式をいくつか作ってみよう.

ワイル順序表示では $(u+iv)_*^2 = (u+iv)^2$ であったが u, v に関する正規順序表示では

$$(u+iv)_*^2 = u^2 - v^2 + 2iu{\circ}v + \hbar$$

であり, $(u+iv)_*^2 \neq (u+iv)_\circ^2$ である.

$e_*^{t(u+iv)}$ は量子正準共役対 (u, v) に関する正規順序表示では補題 2.1 により $e_*^{t(u+iv)} = e^{-\frac{\hbar t^2}{2}} e_\circ^{t(u+iv)}$ であるから, $\hbar > 0$ である限り t に関する収束性はかなり良い関数である.

$(u+iv)_*^m$ の正規順序表示を出すのは面倒に見えるがエルミート多項式の

注3 写像としての関数ではないのでこう呼んだまでである.

母関数表示(5 章(5.14)式，または数学辞典参照)を使うと

$$e^{-\frac{\hbar t^2}{2}}e_\circ^{t(u+iv)}=\sum\nolimits_{n\geq 0}\frac{\sqrt{\hbar}^n}{n!}H_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(u+iv)\Big)t^n$$

が分かるので，正規順序表示で

$$(u+iv)_*^m=\frac{d^m}{dt^m}e_*^{t(u+iv)}\Big|_{t=0}=\sqrt{\hbar}^n H_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(u+iv)\Big)$$

となることが分かる．

$e_*^{t(u+iv)}$ のフーリエ変換の収束性はかなり良いのだがこのことが逆に奇妙な結果も生み出す．任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して $\xi=\zeta+u+iv$ と置くと，

$$-\frac{\hbar}{2}t^2+\xi t=-\frac{\hbar}{2}\Big(t-\frac{1}{\hbar}\xi\Big)^2+\frac{1}{2\hbar}\xi^2$$

と変形して考えれば簡単な計算で

$$\lim_{t\to\pm\infty}e_*^{t(\zeta+u+iv)}=\lim_{t\to\pm\infty}e_\circ^{-\frac{\hbar}{2}\left(t-\frac{1}{\hbar}\xi\right)^2+\frac{1}{2\hbar}\xi^2}=0$$

であり，かつ $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\hbar t^2}{2}}e_\circ^{t(\zeta+u+iv)}dt$ が存在することが分かる．しかし，この収束は $\zeta+u+iv$ を任意に固定したときの収束(各点収束)であって，被積分関数が指数関数だからといって，収束した先が指数関数であるという保証はない．

一方超関数の方でデルタ関数は $\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dt$ と表示されるから，$e^{-\frac{x^2}{2a}}$ のフーリエ変換が $\sqrt{a}e^{-\frac{a\xi^2}{2}}$ であること(数学辞典参照)を使って

$$\begin{aligned}\delta_*((-i)(\zeta+u+iv))&=\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{it(-i)(\zeta+u+iv)}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\hbar t^2}{2}}e_\circ^{it(-i)(\zeta+u+iv)}dt=\sqrt{\frac{2}{\hbar}}e_\circ^{\frac{1}{2\hbar}(\zeta+u+iv)^2}\end{aligned}\tag{2.6}$$

と定義する．$\delta_*((-i)(\zeta+u+iv))$ は $\zeta\in\mathbb{C}$ を任意に固定して (u,v) について $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元であり，さらに $\zeta\in\mathbb{C}$ に関して正則である．

$\delta_*((-i)(\zeta+u+iv))$ は $*$-積の世界ではデルタ関数と似た性質を持ち，超関数の $x\delta(x)=0$ を反映して，ΨDO-積公式を使った計算，つまり正規順序表示では

$$(\zeta+u+iv)*e_\circ^{-\frac{1}{2\hbar}(\zeta+u+iv)^2}=e_\circ^{-\frac{1}{2\hbar}(\zeta+u+iv)^2}*(\zeta+u+iv)=0\tag{2.7}$$

となることが ΨDO-積公式での直接計算で分かる．

全く同様に，$e_*^{it(\zeta+u-iv)}$ についても考えることができる．計算結果は

$$\delta_*(\zeta+u-iv)=\sqrt{\frac{2}{\hbar}}e_\circ^{-\frac{1}{2\hbar}(\zeta+u-iv)^2} \tag{2.8}$$

となる．

一方，**ラプラス変換**(Laplace transform)は

$$V(p)=\int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt \tag{2.9}$$

であるが,

$$p\int_0^\infty e^{-pt}dt=1,\quad p\int_{-\infty}^0 e^{pt}dt=1$$

に注目すると任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して次の二つの積分

$$(\zeta+u+iv)_-^{-1}=\int_{-\infty}^0 e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt,\quad (\zeta+u+iv)_+^{-1}=-\int_0^\infty e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt \tag{2.10}$$

は $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元として存在し，しかも次のことが分かる：

補題 2.4 $(\zeta+u+iv)_-^{-1}$, $(\zeta+u+iv)_+^{-1}$ はどちらも $\zeta+u+iv$ の逆元であり，

$$(\zeta+u+iv)_-^{-1}-(\zeta+u+iv)_+^{-1}=\sqrt{2\pi}\delta_*((-i)(\zeta+u+iv))$$

である．さらに，$(\zeta+u+iv)_-^{-1}$, $(\zeta+u+iv)_+^{-1}$ はどちらも ζ に関して正則になっている．

証明　逆元であることを確かめるには，次のように計算すれば良い：

$$(\zeta+u+iv)*\int_{-\infty}^0 e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt=\int_{-\infty}^0\frac{d}{dt}e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt=1-\lim_{t\to-\infty}e_*^{t(\zeta+u+iv)}=1.$$

$\int_{-\infty}^0 e_*^{t(u+iv)}dt*(\zeta+u+iv)$ も同様である．正則性を示すには

$$\int_{-\infty}^0 e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt=\int_{-\infty}^0 e_\circ^{-\frac{\hbar t^2}{2}+t(\zeta+u+iv)}dt$$

と変形してみればよい．　□

逆元同士の積公式を作るには次のような，レゾルベント恒等式と呼ばれる

部分分数分解を基本にする：

$$\frac{1}{(\alpha+x)(\beta+x)}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+x}-\frac{1}{\beta+x}\right),$$

$$\frac{1}{(\alpha+x)^{n+1}}=(-1)^n\frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{1}{\alpha+x}.$$

これより

$$(\alpha+x)^{-k}(\beta+x)^{-l}=(-1)^{k+l}\frac{d^{k+l}}{d\alpha^k d\beta^l}\frac{1}{\beta-\alpha}\big((\alpha+x)^{-1}-(\beta+x)^{-1}\big)\quad(2.11)$$

が得られる．

これをもとに $(u+iv)_{\pm}^{-m}$ を求めるには

$$(u+iv)_{*\pm}^{-n}=(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0}(t+u+iv)_{\pm}$$

を計算すれば良いが計算公式はあまり簡単ではない．

このように，$*$-積の世界は普通の可換積の入った世界から見るとかなりデフォルメされており，一つの元に逆元が二つ出てきたり，普通の世界で見ると超関数としてしか扱えないような関数が普通の関数としての表示を持ったりする[注4]．

二つの逆元は困る（しかし面白い）現象で

$$(\zeta+u+iv)_{+}^{-1}=(\zeta+u+iv)_{+}^{-1}*\big((\zeta+u+iv)*(\zeta+u+iv)_{-}^{-1}\big)$$
$$\neq\big((\zeta+u+iv)_{+}^{-1}*(\zeta+u+iv)\big)*(\zeta+u+iv)_{-}^{-1})=(\zeta+u+iv)_{-}^{-1}$$

であるから，結合律をこわしている．前の方で，ワイル代数は

$$u:\ f(x)\to xf(x),\qquad v:\ f(x)\to i\hbar\partial_x f(x)$$

のような演算子で生成する代数と考えると都合が良いと言ったのだが，演算子の代数ならば結合律はいつでも成立するのに対して，上のような所まで拡張されたものには結合律は無いのだからこれは演算子の枠を越えた拡張になっていると思わないといけない．上の例では $(\zeta+u+iv)_{+}^{-1}*(\zeta+u+iv)_{-}^{-1}$ は発散している．

注4　逆に $e_*^{\frac{t}{\hbar}uv}$ は $*$-積の世界では普通の指数関数であろうが，後で分かるようにこれをワイル順序表示すると特異点が現れる．

有理関数体

奇妙なのは，任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して逆元 $(\zeta+u+iv)_+^{-1}$, $(\zeta+u-iv)_+^{-1}$ があるということである．後節 7.2 でも述べるが，このような元を**絶対可逆元**と呼ぶ．

$u+iv$, $u-iv$ を行列，または作用素と思ってみると，$u+iv$, $u-iv$ にはスペクトルがない(Spec が空集合)か，あるいは ∞ のみということを意味しているように見えるので，作用素の感覚では考えにくい元である．

次の定理が成立することはすぐ分かるだろう．

定理 2.3 $\xi=u+iv$ とする．多項式環 $\mathbb{C}[\xi]$ と，$\{(a+\xi)_+^{-1};\forall a\in\mathbb{C}\}$ とで作る系は $*$-積に関して可換で結合的な有理関数体であり，位相体である．これを $\mathcal{F}_*^\circ(\mathbb{C})$ と表す．この元はすべて $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元としての表示を持つ．

代数の中で考えて来たから絶対可逆元というのは不思議に見えるかもしれないが，これは漸近展開と考えられるものである．

$$f(\xi)=a_0+a_1\xi^{-1}+\cdots+a_n\xi^{-n}+\cdots$$

のように負冪の形式的冪級数で与えられる元の全体 $\mathfrak{F}$ を考える．これは感覚的には無限遠方でのテイラー展開，または漸近展開と呼ばれるものである．ξ は $\mathfrak{F}$ の中では絶対可逆である．つまり，任意の $c\in\mathbb{C}$ に対して

$$(\xi-c)^{-1}=\xi^{-1}*(1-c\xi^{-1})^{-1}=\xi^{-1}*\sum\nolimits_{k\geq 0}c^k\xi^{-k}$$

で，これは $\mathfrak{F}$ の元である．

u,v に関する正規順序表示で $h(u+iv)$ のような元を考えるときにはそれぞれ ξ^{-1} で展開して，上のような漸近展開で考えないといけないわけで，$u+iv$ が絶対可逆であるということはこれをあたかも**無限遠 ∞ の近傍のみを動く不定元のように考えよ**と言っているように思えるのである．

全く同様に $\bar{\xi}=u-iv$ も絶対可逆であるからこれも ∞ の近傍のみを動く不定元のように思える訳だが，あまり自由に空想すると u も v も独立に ∞ の近傍のみを動く不定元のように思えてしまい，u も v も絶対可逆であるという妙な結論がでてしまう．点集合的な描像を与えるときには十分な注意が必要である．

このようなことは，ワイル順序表示を使ったときにも起こることで，この本の主題はこのような奇妙な現象を事実として見据えることである．我々は **$*$-積の世界こそが本物の世界**であり，可換積を使った関数の表示等は表示を一定にするとか，位相を考えやすくするとかといった二義的なものだと思っているので，どんなに奇妙に見えたとしても，その現実から目をそらす訳にはいかない．

演習問題 1　任意の有界区間 $[a,b],[c,d]$ に対しては

$$\int_a^b\int_c^d e_*^{(s+t)(u+iv)}*(u+iv)dsdt=\left(\int_a^b e_*^{s(u+iv)}ds*(u+iv)\right)*\int_c^d e_*^{t(u+iv)}dt$$
$$=\int_a^b e_*^{s(u+iv)}ds*\left((u+iv)*\int_c^d e_*^{t(u+iv)}dt\right)$$

であることを示せ．（重積分を累次積分に直す計算.）

演習問題 2　微分方程式 $xf(x)-\hbar f'(x)=0$ の解は $f(x)=Ce^{\frac{1}{2\hbar}x^2}$ のみであることを確かめよ．また，定数変化法を用いて，微分方程式 $xf(x)-\hbar f'(x)=g(x)$ を解くことにより，

$$-\frac{1}{\hbar}e^{\frac{1}{2\hbar}x^2}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2\hbar}t^2}g(t)dt,\quad \frac{1}{\hbar}e^{\frac{1}{2\hbar}x^2}\int_x^\infty e^{-\frac{1}{2\hbar}t^2}g(t)dt$$

のどちらも解であることを確かめよ．

演習問題 2 の解法を $*$-積で説明してみよう．まず物理で**真空表現**と呼ばれているものに習って次のような写像を考える：

$$L_f : g(u)*\varpi_{00}\longrightarrow f(u,v)*g(u)*\varpi_{00}$$

$v*\varpi_{00}=0$ だから，右辺は f と g とを入れ換え v が右へ右へと来るように計算すると，v を含まない形まで計算できる．$v*\varpi_{00}=0$ だから，例えば

$$u*g(u)*\varpi_{00}=ug(u)*\varpi_{00},\quad v*g(u)*\varpi_{00}=\hbar ig'(u)*\varpi_{00}$$

である．演習問題 2 は $(u+iv)*f(u)*\varpi_{00}=g(u)*\varpi_{00}$ となる f を求める問題である．逆元 $(u+iv)_{\pm}^{-1}$ の存在は微分方程式の解法にあまり強力には働かないが，特解をさがすには有効で，g が多項式程度の元のときには結合律が成立しているから[注5]，$(u+iv)_{\pm}^{-1}*g(u)*\varpi_{00}$ は微分方程式の解である．

注5　この部分の厳密な証明はあまり簡単ではないが，ここでは一応認めることにする．

そこで，例えば

$$\int_{-\infty}^{0} e_*^{t(u+iv)}dt * g(u) * \varpi_{00}$$

を計算してみると，

$$e_*^{t(u+iv)} = e^{-\frac{\hbar}{2}t^2}e_*^{tu} * e_*^{itv}, \quad e_*^{itv} * g(u) = g(u-\hbar t) * e^{itv}, \quad e^{itv} * \varpi_{00} = \varpi_{00}$$

であるから，

$$\begin{aligned} e_*^{t(u+iv)} * g(u) * \varpi_{00} &= e^{-\frac{\hbar}{2}t^2}e^{tu}g(u-\hbar t) * \varpi_{00} \\ (u+iv)_-^{-1} * g(u) * \varpi_{00} &= \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\hbar}{2}t^2}e^{tu}g(u-\hbar t)dt * \varpi_{00} \end{aligned}$$

であり，積分変数を変換すると，

$$(u+iv)_-^{-1} * g(u) * \varpi_{00} = \frac{1}{\hbar}e^{\frac{1}{2\hbar}u^2}\int_{u}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\hbar}}g(t)dt * \varpi_{00} \tag{2.12}$$

となる．同様に

$$(u+iv)_+^{-1} * g(u) * \varpi_{00} = -\frac{1}{\hbar}e^{\frac{1}{2\hbar}u^2}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2\hbar}}g(t)dt * \varpi_{00} \tag{2.13}$$

となり，二つの解の差は

$$\sqrt{2\pi}\delta_*((-i)(u+iv)) * g(u) * \varpi_{00} = \frac{1}{\hbar}e^{\frac{1}{2\hbar}u^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\hbar}t^2}g(t)dt * \varpi_{00}$$

となる．どちらの計算法が良いかなどと主張するつもりはないが，**微分方程式の解法の中には，演算子的に見ると結合律を満たさない演算も含まれている**のである．結合律を満たさない演算というとかなり危ない計算と思いがちだが，普通の微積分の計算にすでに現れているのである．

奇妙な事柄 1

上に現れた演算子

$$(u+iv) * f(u) * \varpi_{00},\ (u+iv)_-^{-1} * g(u) * \varpi_{00},\ (u+iv)_+^{-1} * g(u) * \varpi_{00}$$

等は一見すると，うまく $g(u)$ の入る関数空間を設定すればその上に働く作用素として実現できても不思議はないように思える．しかし，二つの逆元を認めてしまっては結合律が成立しなくなるのだから，どうしても作用素表現を

つけようとすればどちらか一方の逆元が意味のなくなるような関数空間にするか，あるいは，$\delta_*((-i)(u+iv)) = 0$ となってそこでは二つの逆元が一致してしまうような関数空間にしないといけない．色々試してみればこのような関数空間しか設定できないとことは予想がつくが，しかしそれをどのように選ぶべきか等については良く分からない．

注意　二つの逆元を認めてしまっては結合律が成立しなくなるから，こういう場面が物理の中で出てきたとすると，何かの理由をつけてどちらか一方のみを選んでいるか，またはそうしなければいけないような条件をつけているはずである．もしここで物理が「因果律」を持ち出すのだとしたら，これは重大なことである．言うまでもなく，因果律は「時間の一方行性」に関係する．そして，これは物理原理としては無くては困るものだが，数学の原理とは程遠いものだからである．

ついでに，物理の中では「公理」のごとく扱われるが，数学の中では「公理」としては認められていないものを列記しておこう：

- **時間**: 時間なるものに一方向性が無いと「因果関係」(原因と結果)というものが考えられない．ところで，物理法則というのはほとんど因果関係を表す法則である．にもかかわらず，古典物理の大部分の法則は時間反転に関して対称にできているのである．

- **エネルギー**: エネルギーのというのは閉じた系では保存されるべき量として扱われる．というか，これが「閉じた系」の定義である．ことさら散逸系を問題にしているとき以外は不変，不滅なのは当然と思われている．

- **変分原理**: 物理法則は最終的には変分原理で書かれるべきであるというドグマである．これは極めて古典的なもので，今日これを頭から信じている人は少ないが，古典力学を考えるときには重要である．最近の物理ではこれを経路積分に置き換えようという動きがあって，ほとんど市民権を得ているようである．

- **不確定性原理**: この述べ方は色々あって難しいが，物理世界(相空間)は点集合ではないという原理を含んでいる．これが最も数学化しやすいから，この原理を採用して数学を書いたとき我々の素朴な描像がどうなるかをこの本では問題にしているのである．相対性理論を作ったアインシュタインは最後までこの原理を認めたがらなかったとされている．この原理が「あやしげなものだ」と言っているのではなく，不確定性原理と相対性理論とはどこかではっきり対立してしまう性格のものだとアインシュタインは感じていて，自分の理論を弁護しているのだと理解すべきであろう．

2.2 位相線型空間の完備化

前節のようないささか奇妙なことをきちんと受け止めるために，もう少し位相線型空間とか位相代数に関する知識を補っておかなければならない．ここで 1.2 節の続きとして位相に関することをまとめ，自由テンソル代数をセミノルム系を使って完備化する．そしてそれをもとにしてワイル代数を完備化する．さらにそれが関数空間に，あるセミノルム系を定義したのと同じであることを示す．

この節で $(\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2),*)$ は e_*^{au+bv} のような指数関数を含むフレッシェ代数であることが分かる．

2.2.1 自由テンソル代数のセミノルム系

$\mathcal{T}^m$ を文字 $X_1,\cdots,X_m$ で生成された自由テンソル代数とする．これが位相代数となるように $\mathcal{T}^m$ に位相を入れることを考える．その為には元がどのように書かれているかを良く見て，それを使って書き分けていかなければならない．そう思って自由テンソル代数を見返してみると，使える材料はほんの少ししかないことが分かるのである．前と同様に $W_\alpha = X_{\alpha_1}{\otimes}X_{\alpha_2}{\otimes}\cdots{\otimes}X_{\alpha_N}$ を**単語**(word)と呼ぶ．ただし，

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N),\quad \alpha_i\in\{1,2,\dots,m\}$$

である．$|\alpha|=N$ を単語 W_α の**長さ**と呼ぶ．積はただ並べるだけだったから，$W_\alpha{\otimes}W_\beta=W_{\alpha+\beta}$ のように書くことにする．

定義により $\mathcal{T}^m$ の元は

$$T=\sum c_\alpha X_\alpha \quad (\text{有限和})$$

のように書かれている．

非負数の m 組 $w=(w_1,\cdots,w_m)$ を使って**重み付き長さ** $|\alpha|_{(w)}$ なるものを

$$|\alpha|_{(w)}=\sum_{k=1}^{m} w_k\times(W_\alpha \text{ の中の } X_k \text{ の個数 })$$

と定義する．ここで重み w は $(w_1,\cdots,w_{m-1},0)$ の形でもかまわないことに

注意しておこう．これを使って，セミノルム系 $\| \ \|_{w,s}$, $(s>0)$ を次のように定義する[注6]：

$$\|T\|_{w,s} = \sum |c_\alpha||\alpha|_{(w)}^{|\alpha|_{(w)}} s^{|\alpha|}. \tag{2.14}$$

これは，重み 0 の生成元については増大度は問わないが収束半径が s 以上であるといった感じのことを述べている．さらにここでは $0^0=1$ としている．

任意に固定した w に対してセミノルム系 $\{\|\cdot\|_{w,s}\}_{s>0}$ によって位相を定義し，その位相による $\mathcal{T}^m$ の完備化を $\mathcal{T}_w^m$ とする．

上のものとは別に，重み 0 の生成元について位相をさらにゆるくして，セミノルム系 $\| \ \|_{w,s,n}$, $(s>0, n\in\mathbb{N})$ を

$$\|T\|_{w,s,n} = \sum{}^{n} |c_\alpha||\alpha|_{(w)}^{|\alpha|_{(w)}} s^{|\alpha|_{(w)}} \tag{2.15}$$

によって定義する．ただし，和 $\sum^n$ は重み 0 の生成元が n 個までしか含まれていない項全体にわたるものとする．ここでも $0^0=1$ としている．

セミノルム系 $\{\|\cdot\|_{w,s,n}\}_{s>0,n\in\mathbb{N}}$ による $\mathcal{T}^m$ の完備化を $\mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m$ とする．すると，容易に

$$\mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m = \{T = \sum_\alpha c_\alpha X_\alpha \ (\text{無限和})\ ; \ \|T\|_{w,s,n} < \infty \ \forall s>0, \ \forall n\in\mathbb{N}\}$$

などが分かる．この空間は重み 0 の生成元については形式的冪級数の位相になっているものである．また，定義より

$$\mathcal{T}_w^m \subset \mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m \tag{2.16}$$

であり，埋め込み写像は連続になっていることが分かる．

演習問題 3 (2.15)がセミノルムであることを示せ．

$\mathcal{T}_w^m$, $\mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m$ をひっくるめて**完備自由テンソル代数**と呼ぶ．

まず，次のことに注意する：

注6 自由テンソル代数で考えている限り使える言葉は少ないから，このセミノルム系以外なかなか作れるものではない．$s>0$ は非可算個だが，$s=c+m$, $m=1,2,\ldots$ のようにして可算個選び出して位相を定義してかまわない．

補題 2.5 任意の w に対して $\mathcal{T}_w^m$, $\mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m$ は非可換フレッシェ代数となり，$\bar{w} = \max\{w_1, \cdots, w_m\}$ としたときつぎの不等式が成立する：

$$\|T{\circledast}T'\|_{w,s} \leq \|T\|_{w,e\bar{w}s}\|T'\|_{w,e\bar{w}s},$$

$$\|T{\circledast}T'\|_{w,s,n} \leq \|T\|_{w,e\bar{w}s,n}\|T'\|_{w,e\bar{w}s,n}.$$

証明　容易に

$$|\alpha|_{(w)}^{|\alpha|_{(w)}}|\beta|_{(w)}^{|\beta|_{(w)}} \leq |\alpha+\beta|_{(w)}^{|\alpha|_{(w)}+|\beta|_{(w)}} = |\alpha+\beta|_{(w)}^{|\alpha+\beta|_{(w)}}$$

が分かる．一方，$-\log x$ の凸性より $x, y > 0$ に対して，

$$\log(x+y) \leq (\log x) + \frac{y}{x}, \quad \log(x+y) \leq (\log y) + \frac{x}{y}$$

が得られる．従って，$x, y > 0, a, b > 0$ ならば

$$ax\log(x+y) + by\log(x+y) \leq ax\log x + by\log y + (bx+ay)$$

が分かり，これより $x, y \geq 0$ のときには

$$x^{ax}y^{by} \leq (x+y)^{ax+by} \leq x^{ax}y^{by}e^{bx+ay} \tag{2.17}$$

が得られる．ここで，$0^0 = 1$ と約束している．これを使うと，

$$|\alpha+\beta|_{(w)}^{|\alpha|_{(w)}+|\beta|_{(w)}} \leq |\alpha|_{(w)}^{|\alpha|_{(w)}}|\beta|_{(w)}^{|\beta|_{(w)}}e^{|\alpha|_{(w)}+|\beta|_{(w)}} \tag{2.18}$$

となり，補題が容易に得られる．□

これより，次も得られる：

系 2.4 k を固定したとき，任意の重み w で，$X_m^k{\circledast}\mathcal{T}_w^m$, $X_m^k{\circledast}\mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m$ はそれぞれ線型閉部分空間であり，演算 $X_m^k{\circledast}$ はそれぞれ

$$\mathcal{T}_w^m \to X_m^k{\circledast}\mathcal{T}_w^m, \qquad \mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m \to X_m^k{\circledast}\mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m$$

の位相線型同型を与えている．同じことが ${\circledast}X_m^k$ でも成立する．

さらにこの代数の中では次のことが成立する：

補題 2.6 $T = X_\alpha$ を $\mathcal{T}^m$ の元で $|\alpha|_{(w)} > 0$ となるものとする．すると $e^T = \sum \frac{1}{k!}T^{\circledast k}$ は $0 < \tau < \frac{1}{|\alpha|_{(w)}}$ なる τ に対して $\mathcal{T}_{\tau w}^m$ の元である．

証明 $N = |\alpha|_{(w)}$ と置き，$\tau N < 1$ の条件の下で冪級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(k\tau N)^{k\tau N} s^{k|\alpha|}$ が収束することを言えば良い．ところが $k+1$ 項目と k 項目の比 R_k は

$$R_k = \frac{1}{(k+1)!}((k+1)\tau N)^{(k+1)\tau N} s^{(k+1)|\alpha|} / \frac{1}{k!}(k\tau N)^{k\tau N} s^{k|\alpha|}$$
$$= s^{|\alpha|} \frac{((k+1)\tau N)^{\tau N}}{k+1}(1+\frac{1}{k})^{k\tau N}$$

だから，$\tau N < 1$ では容易に $\lim_{k\to\infty} R_k = 0$ と分かる．後はおなじみの収束判定法である． □

ここで次のことに注意しよう．上に与えた位相は自由テンソル環への位相だが，元の表示の時の単語の文字の順番といったものには関係していない．使われているのは生成元を何個使って項が書かれているかという情報だけである．従って次のことが分かる：

補題 2.7 T に対し，その各項の生成元の並べ方の順序を変えたものを T' とすると，$\|T\|_{w,s} = \|T'\|_{w,s}$, $\|T\|_{w,s,n} = \|T'\|_{w,s,n}$ である．従って $T = T' + S$ ならば，$\|S\|_{w,s} \leq 2\|T\|_{w,s}$, $\|S\|_{w,s,n} \leq 2\|T\|_{w,s,n}$ である．

命題 2.1 各単語の語順を完全にひっくり返す対合的反自己同型 ι はこれまで定義したどの位相に関しても連続になっている．

我々は自由テンソル代数を完備化して作ったフレッシェ代数 $\mathcal{T}_w^m$ や $\mathcal{T}_{w,\mathbb{N}}^m$ を「量子化された C^∞ 関数環」のように考えている．いろいろな幾何的構造は自由テンソル代数に課せられる条件として両側イデアルの形で与えられ，代数は自由テンソル代数をその両側イデアルで割った商代数として与えられると考える．

上の話は自由テンソル代数の話であるが，これを可換自由テンソル代数の話として読みかえることができる．$\otimes$ を $\bullet$ に変えて，$\bullet$ は可換な積と考えて見よう．こうすると，元の表示は当然変わり，$T = \sum a_\alpha X^\alpha$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}\bullet\cdots\bullet X_m^{\alpha_m}$ のようになる．そこで，このように表示される元の全体を後の記号に合わせて $\tilde{S}_w^{m;m}$ と表示しよう．

次の補題は補題 2.7 を考えれば明らかであろう：

補題 2.8 任意の重み w で $\mathcal{T}^m_w$ の元の $\otimes$ を全部 $\bullet$ で置き直すという写像は $(\mathcal{T}^m_w;\otimes)$ から $(\tilde{S}^{m;m}_w;\bullet)$ への連続な準同型となる．この準同型の核は $X_i{\otimes}X_j - X_j{\otimes}X_i$ で生成される閉イデアルである．$\mathcal{T}^m_{w,\mathbb{N}}$ についても同様である．

自由テンソル代数を使う ワイル代数の完備化

代数というのは，生成元と基本関係が分っておれば定義できるものである．ワイル代数は生成元 $u, v, \hbar$ に基本関係 $u * v - v * u = -\hbar i$ が入っているだけのものである．このような代数は普遍テンソル代数を上の基本関係式 $u{\otimes}v - v{\otimes}u + \hbar i$ で生成される両側イデアル $\mathcal{I}$ で割れば(商空間を作れば)得られる．

しかし，1.2 節の冒頭で述べたように H を与えて $\frac{d}{dt}f_t = H * f_t$ のようなものを初期条件 $f_0 = 1$ で解こうとすれば，この解は形式的には $f_t = e_*^{tH} = \sum \frac{t^k}{k!}H^k$ であるから，これも代数の中に入れて考えたい．このような超越的なものを扱うにはどうしても代数に位相を定義して完備化して完備位相代数を扱う必要がある．

このやり方として最初に思い付くのは普遍テンソル代数に前節で述べた位相を定義して完備な位相代数を作り，その中で基本関係式で作る両側イデアルの閉包を考え，それで商空間を作るというやり方である．

演習問題 4 フレッシェ代数 F に対して，F の両側閉イデアルを I とすれば，商空間 F/I はフレッシェ代数となることを示せ．

以下では主に 2 変数で考え，重み w は $w = (\tau, \tau)$ のようなものに限るものとする．そして w と書いていた所を τ と書くものとする．

$\mathcal{T}^2_\tau$ を考え，ワイル代数の関係式イデアル $\mathcal{I}$ の閉包を $\mathcal{I}_\tau$ とする．$\mathcal{T}^2_\tau/I_\tau$ を考える．これはすべての $\tau > 0$ に対して完備位相結合代数である．

定理 2.4 $1/2 \leq \tau$ の時には商代数はワイル代数を稠密に含んだフレッシェ代数となる．つまり，位相結合代数であり，線型空間としてはフレッシェ空間となる．

しかし，$0 < \tau < 1/2$ の時には商代数は 0 のみからなる代数に崩壊する．

結果的に，$1/2 \leq \tau$ の時の $\mathcal{T}^2_\tau/I_\tau$ しか使いものにならないと言っているのだ

が，補題 2.6 より，$e_{\otimes}^{tX_1\otimes X_2}$ のような元は $\mathcal{T}_\tau^2$, $0<\tau<1/2$, にしか入っていないのだから，これでは

$$\frac{d}{dt}f_t=(X_1 {*} X_2) * f_t$$

のようなもの[注7]は扱えないことになる．対称性が高いということは，美しいことだから良いことのように考えがちだが，そうとばかりは言っていられないのが自然界である．

しかし，位相を入れて完備化するという作業は，手続きとしてはかなり漠然とした作業であるのに，どうしてこのようなことまで分かるのかは 1.4.2 節を参考にして考えてもらいたい([18] に収録してある)．

2.2.2 セミノルム系による完備化

次に関数空間にセミノルム系を定義しこれで完備化しよう：

任意の正数 $p\,(>0)$ に対して $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ なる部分空間を

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)=\{f\in Hol(\mathbb{C}^2)\mid \|f\|_{p,s}=\sup_{(x,y)}|f|\,e^{(-s|\xi|^p)}<\infty, \forall s>0\} \quad (2.19)$$

で定義する．但し $|\xi|=(|x|^2+|y|^2)^{1/2}$ である．ノルムの族 $\{\|\ \|_{p,s}\}_{s>0}$ で $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ に位相を入れれば，これで $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2),\cdot)$ は普通の積 $\cdot$ に関して可換なフレッシェ代数となることが容易に分かる．

さらに $0<p<p'$ となっておれば，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\subset\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ でありこの埋め込みは連続写像にもなっている．

また，多項式全体 $\mathbb{C}[x,y]$ は $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ の中に稠密に含まれている．この節の目標は次の定理である：

定理 2.5 ΨDO-積公式，$\bar{\Psi}$DO-積公式，モイヤル積公式のいずれも次のような空間にまで拡張できる：

(i) $0<p\le 2$ に対しては，空間 $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2),*)$ は位相結合代数となる．

注7 実はこれは微分方程式である．

(ii) $p>2$ 及び $\hbar\in\mathbb{R}$ の場合には上の三つの積公式は $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\geq 1$ なる任意の p' に対して

$$\begin{array}{l}\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\times\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)\to\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\\ \mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)\times\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\to\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\end{array}\quad \text{なる連続双線型写像に拡張される．}$$

この定理は丁寧に評価式を作って証明するのだが，その前に(ii)の結論について少し解説しておこう．$p>2$ であるから p' は $p'<2$ でなければならず，従って(i)より $(\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2);*)$ はフレッシェ代数である．従って(ii)は $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2), p>2,$ が $\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ を係数域に持つ位相加群になっていることを述べているのである．

$\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ が $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ の中で稠密であることを使い，$\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ の列で近似することにより，定理 2.5,(ii)から結合律について次のことが容易に得られる：

系 2.5 f,g,h のうち二つが $\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ の元，残りが $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ の元のとき，結合律 $f*(g*h)=(f*g)*h$ が成立する．

$(Hol(\mathbb{C}^2),\mathbb{C}[u,v],*)$ は両側 $\mathbb{C}[u,v]$-加群であったから，f,g,h のうち二つが多項式，残りが $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元のとき結合律は成立していた．系 2.5 により結合律が成り立つ範囲がかなり広がるのである．

完備自由テンソル代数への埋め込み

u,v の多項式全体を $\mathbb{C}[u,v]$ とする．これにうまい位相を入れてそれで完備化した空間に ∗-積を拡張しようとしているのだが，そのためにこれをまず，$\mathcal{T}^2_\tau$ の中に埋め込んで，そこから位相を導入することを考えよう．$\mathbb{C}[u,v]$ は普通の可換積 $\circ, \bullet, \cdot$ で考えるが，それぞれに応じて $\mathcal{T}^2_\tau$ への線型の埋め込みを次のように定義する：

- $i_\circ:(\mathbb{C}[u,v];\circ)\to\mathcal{T}^2_\tau,\quad i_\circ(u^k{\circ}v^l)=X_1^k{\otimes}X_2^l$
- $i_\bullet:(\mathbb{C}[u,v];\bullet)\to\mathcal{T}^2_\tau,\quad i_\bullet(u^k{\bullet}v^l)=X_2^l{\otimes}X_1^k$
- $i_\odot:(\mathbb{C}[u,v];\cdot)\to\mathcal{T}^2_\tau,\quad i_\odot(u^k\cdot v^l)=X_1^k{\odot}X_2^l.$

最初の二つの定義は明確であろう．この埋め込みの像をそれぞれ $\mathcal{S}^\circ$, $\mathcal{S}^\bullet$ とする．

$\odot$ は**対称積**と称するもので[注8]，次のように定義される：

まず，$\mathcal{T}^2$ で次のような積 $a \circ b = \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a)$ を考える．これも**対称積**と呼ばれるが，この積は結合律をみたさない[注9]．さらに，記号として

$$(a\circ)^p \cdot c = a \circ (a \circ (\cdots (a \circ c) \cdots)) \quad (a \circ \text{ が } p \text{ 個})$$

と書くことにし，

$$(a\circ)^p \cdot (b\circ)^q \cdot c = a \circ (a \circ (\cdots (a \circ (b\circ)^q \cdot c) \cdots)) \quad (a \circ \text{ が } p \text{ 個})$$

のように書くことにする．この記号を用いて $\mathcal{T}$ の線型部分空間 $\mathcal{S}^{\odot}$ を

$$\mathcal{S}^{\odot} = \{\sum c_{\alpha,\beta}(X_1\circ)^{\alpha} \cdot (X_2\circ)^{\beta} \cdot 1\}$$

で定める．$\mathcal{S}^{\odot}$ 上に可換な積 $\odot$ を次で定義する：

$$\begin{aligned} &((X_1\circ)^k \cdot (X_2\circ)^l \cdot 1)\odot((X_1\circ)^m \cdot (X_2\circ)^n \cdot 1) \\ &= (X_1\circ)^{k+m} \cdot (X_2\circ)^{l+n} \cdot 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

この積 $\odot$ を使えば，

$$X_1^{\alpha} \odot X_2^{\beta} = (X_1\circ)^{\alpha} \cdot (X_2\circ)^{\beta} \cdot 1 \tag{2.21}$$

のように書いておいて良い．積を双線型に拡張すれば $\mathcal{S}^{\odot}$ は $\odot$-積に関して可換結合代数になる．

$\mathcal{S}^{\circ}, \mathcal{S}^{\bullet}$ は自然に多項式の空間と線型同型だから，これらの上に多項式と同じ可換積を入れておく．

$\mathcal{S}^{\circ}_{\tau}, \mathcal{S}^{\bullet}_{\tau}, \mathcal{S}^{\odot}_{\tau}$ を $\mathcal{S}^{\circ}$, $\mathcal{S}^{\bullet}$, $\mathcal{S}^{\odot}$ の $\mathcal{T}^2_{\tau}$ 内での閉包とする．

$\|X_1^{\alpha} \odot X_2^{\beta}\|_{\tau,s} = \|X_1^{\alpha} \otimes X_2^{\beta}\|_{\tau,s}$ 等に注意すれば次のことは容易であろう：

命題 2.2 任意の $\tau > 0$ について積 $\odot$ は $\mathcal{S}^{\odot}_{\tau} \times \mathcal{S}^{\odot}_{\tau}$ から $\mathcal{S}^{\odot}_{\tau}$ への連続双線型写像であり，従って $(\mathcal{S}^{\odot}_{\tau}; \odot)$ は可換フレッシェ代数となる．$(\mathcal{S}^{\circ}_{\tau}; \circ)$, $(\mathcal{S}^{\bullet}_{\tau}; \bullet)$ についても同様である．

[注8] 実はワイル代数の中で $*$-積で定義するときにもこのようにして定義する．結果は同じものになる．

[注9] そのかわり，$a \circ b = b \circ a$ であり，$a^2 \circ (b \circ a) = (a^2 \circ b) \circ a$ の形の限定された結合律をみたす．このようなものをジョルダン代数(Jordan algebra)と呼ぶ．

次のことは $\mathcal{S}_{\tau}^{\odot}$ にのみ言える：

補題 2.9 対合的反自己同型 ι は $\mathcal{S}_{\tau}^{\odot}$ を不変にしている．

次を示す．これは前節の定理 2.4 の証明にも使われる：

命題 2.3 任意の $p>0$ に対して，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ は $\mathcal{S}_{\frac{1}{p}}^{\odot}$, $\mathcal{S}_{\frac{1}{p}}^{\circ}$, $\mathcal{S}_{\frac{1}{p}}^{\bullet}$ に位相線型空間として同型である．

証明　$\mathcal{S}_{\frac{1}{p}}^{\odot}$ についてのみ証明するが，他も同様である．まず多項式の方の単項式とそれに対応する対称テンソルの方の単項式に対してセミノルムを比較してみると次が成立している：任意の $s>0$ に対して

$$\|u^k v^l\|_{p,s} \le \|X_1^k \odot X_2^l\|_{p^{-1},(sp)^{-1/p}} \le \|u^k v^l\|_{p,sp\delta}. \tag{2.22}$$

但し，$\delta = e^{-(1+\frac{p}{2})}$ である．上の不等式(二つある)を導くにはまず u,v を動かすとき，

$$|u^k v^l| e^{-s|\xi|^p}, \quad |\xi|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

の最大点が $k+l = sp|\xi|^p$ をみたし(偏微分してみよ)，最大値は

$$k^{\frac{k}{2}} l^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{p}(k+l)} (sp)^{-\frac{1}{p}(k+l)} (k+l)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(k+l)}$$

であることに注意する．これより，

$$\|u^k v^l\|_{p,s} \le (sp)^{-\frac{1}{p}(k+l)} (k+l)^{\frac{1}{p}(k+l)}$$

が分かり，従って $\|u^k v^l\|_{p,s} \le \|X_1^k \odot X_2^l\|_{p^{-1},(sp)^{-1/p}}$ が得られる．

次の不等式を得る為に，$2<e$ に注意し不等式 (2.17)を思い出すと，

$$(sp)^{-\frac{1}{p}(k+l)} (k+l)^{\frac{1}{p}(k+l)} \le k^{\frac{k}{2}} l^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{1}{p}(k+l)} (sp\delta)^{-\frac{1}{p}(k+l)} (k+l)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(k+l)}$$

が得られる．但し $\delta = e^{-(1+\frac{p}{2})}$ である．これより $\|X_1^k \odot X_2^l\|_{p^{-1},(sp)^{-1/p}} \le \|u^k v^l\|_{p,sp\delta}$ が得られる．

上の不等式より $T = \sum a_{k,l} X_1^k \odot X_2^l$ とこれに対応する $t = \sum a_{k,l} u^k v^l$ については不等式

$$\|t\|_{p,s} \le \|T\|_{p^{-1},(sp)^{-1/p}}$$

が得られるから，不等式 (2.22)は自然な，連続な埋め込み $\mathcal{S}_{\frac{1}{p}}^{\odot} \hookrightarrow \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ を与える．

次に $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2) \subset \mathcal{S}_{\frac{1}{p}}^{\odot}$ を示す．

任意の $f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ は整関数だから，f は収束冪級数 $f = \sum c_{m,n} u^m v^n$ として表示される．$f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ としているのだから定義より $|f(u,v)| \le Ce^{\delta|\xi|^p}$ が成立し，

$M(r) = \max_{|\xi|=r} |f(u,v)|$ とするとコーシーの積分公式より，任意の $\delta > 0$ に対しある定数 $C_\delta > 0$ があって，

$$|c_{m,n}| \leq \frac{M(r)}{r^{m+n}} \leq C_\delta \frac{e^{\delta r^p}}{r^{m+n}}$$

が成立する．

δ を固定し，r を動かして右辺の最小値を取れば

$$|c_{m,n}| \leq C_\delta (\delta ep)^{\frac{1}{p}(m+n)} (\frac{1}{m+n})^{\frac{1}{p}(m+n)} \tag{2.23}$$

が得られる．式(2.23)を使って，δ を十分小さくすれば $f \in \mathcal{S}^{\odot}_{\frac{1}{p}}$ が分かる．

これは任意の $f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ は自然に $\mathcal{S}^{\odot}_{\frac{1}{p}}$ の元とも考えられることを述べているわけだから，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ と $\mathcal{S}^{\odot}_{\frac{1}{p}}$ とは線型同型でもある． □

上のことから，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ の話はそっくり $\mathcal{S}^{\odot}_{\frac{1}{p}}, \mathcal{S}^{\circ}_{\frac{1}{p}}, \mathcal{S}^{\bullet}_{\frac{1}{p}}$ の話に移し替えられる．

記号が繁雑なので，以下では $\odot, \circ, \bullet$ を付けるのをやめて $\mathcal{S}_\tau$ と書くことにしよう．つまり，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ のところでモイヤル積公式，ΨDO-積公式等で計算することは $\mathcal{S}_{\frac{1}{p}}$ のところで形式上同じ積公式を用いて計算することである．そこで，$\mathcal{S}_{\frac{1}{p}}$ のところで ΨDO-積公式，$\bar{\Psi}$DO-積公式，モイヤル積公式を用いて定義される積をそれぞれ $*_\psi$，$*_{\bar{\psi}}$，$*_\mu$ と書いておこう．

命題 2.3 により，以下の定理 2.6, 補題 2.11, 定理 2.7 を証明すれば定理 2.5 は得られる．

セミノルムで積に関しての評価をするために次の事を用意しておく：

補題 2.10 任意の $\tau > 0$ と任意の $s \gg 0$ に対して次の不等式

$$\|\partial^k_{X_1}\partial^l_{X_2} X^m_1 \odot X^n_2\|_{\tau,s} \leq \|X^m_1 \odot X^n_2\|_{\tau,s} m^{k(1-\tau)} n^{l(1-\tau)}$$

が得られる．

証明 $\partial^k_{X_1}\partial^l_{X_2} X^m_1 \odot X^n_2 = \frac{m!}{(m-k)!}\frac{n!}{(n-k)!} X^{m-k}_1 \odot X^{n-l}_2$ は明らかだから，セミノルムの定義より

$$\begin{aligned}
&\|\partial^k_{X_1}\partial^l_{X_2} X^m_1 \odot X^n_2\|_{\tau,s} \\
&= \frac{m!}{(m-k)!}\frac{n!}{(n-l)!} s^{\tau(m+n-k-l)} (m+n-k-l)^{\tau(m+n-k-l)} \\
&< m^{\tau k} m^{k(1-\tau)} n^{\tau l} n^{l(1-\tau)} s^{\tau(m+n-k-l)} (m+n)^{\tau(m+n-k-l)} \\
&< m^{k(1-\tau)} n^{l(1-\tau)} s^{\tau(m+n-k-l)} (m+n)^{\tau(m+n)}
\end{aligned}$$

が分かる．これより，容易に求める評価式が得られる． □

定理 2.6 $*_\hbar$ を $*_\psi$, $*_{\bar\psi}$, $*_\mu$ のいずれかとする．積 $*_\hbar$ は $\frac{1}{2}\le\tau$ の場合には $\mathcal{S}_\tau$ に拡張でき，$(\mathcal{S}_\tau, *_\hbar)$ は非可換フレッシェ代数となる．特にセミノルムについては次のような不等式が成立する：

$$\|f *_\hbar g\|_{\tau,s} \le \|f{\odot}g\|_{\tau,se^{|\hbar|/\tau}} \le \|f\|_{\tau,see^{|\hbar|/\tau}}\|g\|_{\tau,see^{|\hbar|/\tau}} \tag{2.24}$$

証明 $*_\mu$-積について証明するが，他の場合も全く同様である．$f=\sum a_{k,l}X_1^k{\odot}X_2^l$, $g=\sum b_{m,n}X_1^m{\odot}X_2^n$, に対してかなり粗い評価で

$$\|f *_\hbar g\|_{\tau,s} \le \sum_{k,l,m,n}|a_{k,l}||b_{m,n}|s^{\tau(k+l+m+n)}(k+l)^{\tau(k+l)}(m+n)^{\tau(m+n)} \times\sum_p \frac{1}{p!}|\hbar|^p(k+l)^{p(1-\tau)}(m+n)^{p(1-\tau)}$$

が分かる．次の式

$$(k+l)^{p(1-\tau)}(m+n)^{p(1-\tau)} < (k+l+m+n)^{2p(1-\tau)}$$

に注意すれば

$$\sum_p \frac{1}{p!}|\hbar|^p(k+l+m+n)^{2p(1-\tau)} = e^{|\hbar|(k+l+m+n)^{2(1-\tau)}}$$

だから $\frac{1}{2}\le\tau$ なら $2(1-\tau)\le 1$ であり，従って

$$\|f *_\hbar g\|_{\tau,s} \le \|f{\odot}g\|_{\tau,se^{|\hbar|/\tau}}.$$

(2.18)を使えば第二の不等式は容易である． □

上の証明の中の最初の評価式の中では p に関して ∞ までたしあげる必要はなく $\min(k+l, m+n)$ までで十分である．従って $0<\tau<\tau'$ ならば次のように置いてよい：

$$(k+l)^{\tau(k+l)}(k+l)^{p(1-\tau)} \le (k+l)^{\tau'(k+l)}(k+l)^{p(1-\tau')},$$

$$(m+n)^{\tau(m+n)}(m+n)^{p(1-\tau)} \le (m+n)^{\tau'(m+n)}(m+n)^{p(1-\tau')}.$$

これを使って $0<\tau<\frac{1}{2}$ のときには次が得られる：

補題 2.11 $0 < \tau < \tau'$ であり，$\tau + \tau' \geq 1$ をみたす任意の τ' に対して評価式

$$\|f *_\hbar g\|_{\tau,s} \leq \|f\|_{\tau,see^{|\hbar|/\tau}} \|g\|_{\tau',see^{|\hbar|/\tau'}}$$

が成立する．

これらを合せて次の定理が得られる：

定理 2.7 $0 < \tau < \frac{1}{2}$ のとき，積 $*_\hbar$ は $\tau < \tau'$ で $\tau + \tau' \geq 1$ となる任意の τ' に対して以下のような連続双線型写像を与える：

$$*_\hbar : \mathcal{S}_\tau \times \mathcal{S}_{\tau'} \to \mathcal{S}_\tau, \quad *_\hbar : \mathcal{S}_{\tau'} \times \mathcal{S}_\tau \to \mathcal{S}_\tau.$$

また，

$$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2) = \bigcup_p \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2), \quad \mathcal{E}_{q+}(\mathbb{C}^2) = \bigcap_{p>q} \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$$

とし，$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ には帰納極限位相，$\mathcal{E}_{q+}(\mathbb{C}^2)$ には射影極限位相[注10]を入れる．すると，$\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ はフレッシェ代数であり，$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ は $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ を係数域に持つ位相加群（両側 $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$-加群）になっている．

$$(\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2), \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2); *)$$

を**完備ワイル空間**と呼ぶことにする．

補題 2.12 $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ が $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ の中で稠密だから結合律については次のことが分かる：

- f, g, h のうち二つが $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元，残りが $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ の元ならば結合律 $f * (g * h) = (f * g) * h$ が成立する．

- $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \geq 1$, $0 < p' \leq p$ のとき，f, g, h のうち二つが $\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ の元，残りが $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ の元ならば結合律 $f * (g * h) = (f * g) * h$ が成立する．

注10 帰納極限位相もこめて次節参照．

演習問題 5 任意の $a,b,c\in\mathbb{C}$ について，$e^{au+bv+c}\in\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$，$e^{au^2+bv^2+cuv}\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ であることを示せ．さらに

$$\varpi_{00},\ \bar{\varpi}_{00},\ \frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv}),\ \frac{1}{v}(1-e^{-\frac{2i}{\hbar}uv})\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2).$$

を示せ．

$e^{\pm\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元であり $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ に関して連続にもなっている．

射影極限位相

一般に自然数の集合 $\mathbb{N}$ の各元 m に対して位相線型空間 V_m が与えられているとする．各 $k\in\mathbb{N}$ で連続線型写像 $\pi_k:V_{k+1}\to V_k$ が与えられているものとしよう．こういうものを**射影的系**(projective system)という．

直積空間 $\prod_{m\in\mathbb{N}}V_m$ は前に定義してあるが，直積空間の元

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots);\quad a_m\in V_m$$

で各 k で $\pi_k(a_{k+1})=a_k$ が成立しているもの全体を考え，これを

$$\operatorname*{proj\,lim}_{m\to\infty}V_m$$

と書き，**射影極限**と呼ぶ．位相は直積位相から自然に誘導する(相対位相)．これを射影極限位相と呼ぶ．各 V_m がフレッシェ空間のときには，$\operatorname{proj\,lim}_{m\to\infty}V_m$ もフレッシェ空間となる．

直和空間に入れる位相については以下の帰納極限位相の項を参照してもらいたい．

帰納極限位相

各 $k\in\mathbb{N}$ で $V_k\subset V_{k+1}$ となっているとする．このようなものを**帰納的系**(direct system)と呼ぶ．このとき，$V_\infty=\bigcup_k V_k$ に位相を入れて位相線型空間として考えるには次のような帰納極限位相と呼ばれる位相を入れる．(この位相は群の演算となじみが悪いのでこの本ではほとんど使われない.)

V_∞ の部分集合 U が開部分集合であるとは任意の k に対して $U\cap V_k$ が V_k の開部分集合になる場合を言う．

この位相がどんなものか理解するために，$V_k = \mathbb{R}^k$ で自然に $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ となっている場合で考えてみよう．この場合は V_∞ は $\mathbb{R}^\infty$ と書かれる．集合としてはどこかから先が全部 0 となる数列全体

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots, 0, \cdots 0, \cdots)$$

である．

$\varepsilon_k > 0$ を任意の数列とし，

$$U(\{\varepsilon_k > 0\}) = \{(a_k; k \in \mathbb{N}) \in V_\infty; |a_k| < \varepsilon_k\}$$

とすると，これは $\mathbb{R}^\infty$ の 0 の開近傍である．近傍系は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}_+$ への写像全体と同じ数だけあるから，$\mathbb{R}^\infty$ は帰納極限位相に関して第一可算性を持っていないことが対角線論法で容易に分かる[注11]．次のことが分かる：

補題 2.13 $\mathbb{R}^\infty$ 自身は帰納極限位相で完備である．

証明 証明は対角線論法である．$\mathbb{R}^\infty$ の有向コーシー列 $\{a^{(\alpha)}\}_{\alpha \in I}$（$I$ は有向集合）は座標の番号 k を固定すれば各 k について収束するから，0 でないものが無限に現れる数列 $a = \{a_k; k \in \mathbb{N}\}$ が $\{a^{(\alpha)}\}_{\alpha \in I}$ の極限として得られるとして矛盾を導く．

$$a^{(\alpha)} = \{a_k^\alpha; k \in \mathbb{N}\}$$

としよう．この場合各 k においては可算個の収束部分列が取れるから，対角線論法で，$I = \mathbb{N}$ として良いことが分かる．つまり，可算個の点列で上のようなものが作られるとしてよい．

各 α に対し，$a_{n(\alpha)}^\alpha \neq 0$ でそこから先の番号の a_k^α がすべて 0 となるような番号 $n(\alpha)$ が定まる．$\{n(\alpha); \alpha \in I\}$ に最大値があっては仮定に反するから，部分列 $\{\alpha_m\}_{m=1,2,\ldots}$ で

$$\lim_{m \to \infty} n(\alpha_m) = \infty$$

となるようなものが選べる．これを使って 0 の $U(\{\varepsilon_k > 0\})$-近傍を作るのだが，$a_{n(\alpha_m)}^{\alpha_m} \neq 0$ だから特にこの番号の所は

$$\varepsilon_{n(\alpha_m)} = \frac{1}{2}|a_{n(\alpha_m)}^{\alpha_m}|$$

と定義する．$\{a^{(\alpha)}\}_{\alpha \in I}$ はコーシー列だとしていたから，ある α_0 があって，$\alpha \geq \alpha_0$

注11 実数の濃度が可算無限でないということの証明と同じ．しかし，このために帰納極限位相は位相群論となじみにくいのである．

なら $a^{\alpha}-a^{\alpha_0}$ はすべて $U(\{\varepsilon_k>0\})$ に入っていなければならないが，これは $n(\alpha_0)$ より先の番号 k では全て $|a_k^{\alpha}|<\varepsilon_k$ となっていることを意味する．ところが上の取り方をみると，いくらでも先の方に $\varepsilon_k<|a_k^k|$ となるものが現れるようにとってあり，こんなことにはなっていない．これより矛盾が出て，$\mathbb{R}^{\infty}$ の中でのコーシー列というのも結局どこかの $\mathbb{R}^k$ の中でのコーシー列に限られることが分かる．　□

対合的反自己同型

ここで，$\iota u=u,\iota v=v,\iota i=-i$ と定義して，ワイル代数に自然に定義される対合的反自己同型(involutive anti-automorphism)ι と上に述べた積公式との関係について述べておこう．$\iota[u,v]=[\iota v,\iota u]$ だからワイル代数に対合的反自己同型を与えることは明白であろう．

補題 2.14 対合的反自己同型 ι は $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ 上にも定義される．しかも $f*g$ が定義されておれば，$\iota(g)*\iota(f)$ も定義され，$\iota(f*g)=\iota(g)*\iota(f)$ である．

$\iota(u*v)=v*u=u*v+\hbar i$ だから，正規順序表示で $u{\circ}v$ と書かれている元は $\iota(u{\circ}v)=u{\circ}v+\hbar i$ である．これは，$\iota(u{\circ}v)=u{\bullet}v$ だと言っても良い．一方ワイル順序表示では $\iota(uv)=uv$ である．次のことがワイル順序表示の良いところである：

命題 2.4 ワイル順序表示では $f*g$ が定義できれば，$\bar{g}*\bar{f}$ も定義でき，$\iota(f*g)=\iota g*\iota f$ である．しかも，$\iota(f)=\bar{f}$ である．ただし，$(\bar{f})(u,v)=\overline{f(u,v)}$ である．

2.2.3　部分ワイル空間

完備ワイル空間 $(\mathcal{E}_{\infty}(\mathbb{C}^2),\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2);*)$ において，$\mathcal{E}_{\infty}(\mathbb{C}^2)$ の線型部分空間 $\mathcal{A}$ が，**部分ワイル空間**であるとは，$f,g\in\mathcal{A}$ で $f*g$ が $\mathcal{E}_{\infty}(\mathbb{C}^2)$ の元として定義出来ているとき，$f*g\in\mathcal{A}$ となる場合を言う．

これまで様々な関係式をみたす元を見て来たがこれらをもとにして様々な部分ワイル空間を考えることができるのはあきらかであろう．点集合的イメージで完備ワイル空間 $(\mathcal{E}_{\infty}(\mathbb{C}^2),\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2),*)$ を何かある X 上の関数環のよう

に思ったときには，部分ワイル空間 $\mathcal{A}$ を考えるということは $\mathcal{A}$ の元で識別できない X の元は同じ元と見なすということだから，X 上に何か同値関係 $\sim$ が定義され，その同値類を一点と見なしていることになる．これは商空間 $X/\sim$ を考えていることにあたる．

以下では，今までと少し違う部分ワイル空間の例を考えよう．

$(\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2), \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2), *)$ の中で $f(e^{ix}, y)$ のような，x に関して周期が 2π の関数つまり，$f(x+2\pi, y) = f(x, y)$ を満たす関数のみを考え，その全体を $\mathcal{E}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ とし，

$$\mathcal{E}_{1+}(T^*S^1 \times \mathbb{C}) = \mathcal{E}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C}) \cap \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$$

とする．(T^*S^1 は S^1 の余接バンドルを表す記号であるが，気にしなくて良い.) 次のことは容易であろう：

補題 2.15 $\mathcal{E}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ は $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ の部分ワイル空間である．特に，$\mathcal{E}_{1+}(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ は $*$-積で閉じている．

$e^{kix}; k \in \mathbb{Z}$ は $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元であるが，$e^{tix}; t \in \mathbb{R}$ は一般には $\mathcal{E}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ に入らない．真空 $\varpi_{00} = 2e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ であったが，$\mathcal{E}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ に入らない．

$[x, y] = -\hbar i$ だから，モイヤル積公式(1.10)より，$[y, e^{ix}] = -\hbar e^{ix}$ である．x を実数に y を正の実数の制限して考えることができるなら，これで極座標系のようにも見えるだろう．これと極座標系との関係は後の方の 7.2 節でもう少し詳しく考察する．

同様モイヤル積公式(1.10)より

$$f(x,y) * e^{\frac{2\pi i}{\hbar}y} = f(x+\pi, y)e^{\frac{2\pi}{\hbar}y}, \quad e^{\frac{2\pi i}{\hbar}y} * f(x,y) = f(x-\pi, y)e^{\frac{2\pi}{\hbar}y}$$

を得る．したがって

$$f(x,y) * e^{\frac{2\pi i}{\hbar}y} = e^{\frac{2\pi}{\hbar}y} * f(x+2\pi, y) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar}y} * f(x,y)$$

となり，$e^{\frac{2m\pi i}{\hbar}y}; m \in \mathbb{Z}$ は $\mathcal{E}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ の中心(center)の元となる．
$\mathcal{Z}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ を $\mathcal{E}_\infty(T^*S^1 \times \mathbb{C})$ の中心としよう．

補題 2.16 $\mathcal{Z}_\infty(T^*S^1\times\mathbb{C})$ は y のみの関数で周期 $\hbar$ の正則関数 $f(y+\hbar)=f(y)$ の全体である．

証明　$e^{ity}*g(x,y)=g(x+\hbar t,y)*e^{ity}$ だから，g が中心の元ならば，

$$(g(x,y)-g(x+\hbar t,y))*e^{ity}=0.$$

これに右から e^{-ity} を $*$ 積してやると，g は y のみの関数 $f(y)$ でないといけないことが分かる．すると $e^{kix}*f(y)=f(y+k\hbar)*e^{kix}$ だから，同じ論法で $f(y)=f(y+\hbar)$ をみたす関数でなければならない．　□

$\hbar$ がものすごく小さいものだとすると，周期 $\hbar$ の正則関数というのは何か実軸上ではほとんど定数に見えてしまう C^∞ 関数と言っても良いであろう．しかし，組織的なやり方で両者をつなぐ理論は見当たらない．

2.3　相互変換

ワイル代数には正規順序表示，反正規順序表示，ワイル順序表示という三種類の表示法があった[注12]．しかも，これらの表示方法は量子正準共役対 (u,v) の取り方に依存していた．つまり，別の量子正準共役対 (u',v') を使えば，また別の順序表示が (u',v') に関して得られる訳である．

表示方法によって計算できるものの範囲が変わりはするが，我々はこれを**何か一つのものの違う形の表示**と考えているのである．これは極めて大きい考え方の変更である．

演習問題 6　u,v を生成元とする $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ に於いて，$x=e^u, y=e^{-u}*v$ とすると $[x,y]=-\hbar i$ であることを示せ．

上のような量子正準共役対もあるのだが，この節ではまず (u,v) に関する正規順序表示とワイル順序表示の間の相互変換(intertwiner)公式を考え，次に互いに線型に結び付いている量子正準共役対を使ってそれに関する正規順序表示間の相互変換を考える．つまり (u,v) に関する正規順序表示と (u',v') に関する正規順序表示の間の相互変換を問題にする．ただし，(u',v') と (u,v)

注12 後のほうで，我々はクリフォード表示とでも呼ぶべき第4の表示があることを示す．

とは $u' = au + bv$, $v' = cu + dv$, $ad - bc = 1$ で結ばれているものとしている．

2.3.1 いろいろな順序表示間の相互変換

まず，(u, v) に関する正規順序表示とワイル順序表示との間の相互変換を考る．相互変換公式を得る原理は $*$-指数関数 $e_*^{\alpha u+\beta v}$ のワイル順序表示 $e^{\alpha u+\beta v}$ と正規順序表示 $e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta}e_\circ^{\alpha u+\beta v}$ とは同じものとしなければならないということである．（補題 2.1 参照.）

指数関数は C^∞-関数の中で稠密だから，

$$e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta}e_\circ^{\alpha u+\beta v} = e^{\frac{\hbar i}{2}\partial_u\partial_v}e_\circ^{\alpha u+\beta v}$$

であることを考えれば，相互変換は

$$I_\cdot^\circ f = e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta}f$$

のような無限階の微分作用素として定義しなければならない．

(u, v) に関する正規順序表示と (u', v') に関する正規順序表示の間の相互変換公式を得る原理は $*$-指数関数 $e_*^{\alpha u+\beta v}$ と $e_*^{\alpha' u'+\beta' v'}$ は量子正準共役対 (u, v) と (u', v') が線型関係式で結ばれており，かつ $\alpha u + \beta v = \alpha' u' + \beta' v'$ ならば当然一致するはずだということである．

補題 2.1 を量子正準共役対 (u', v') に適用して，(u', v') に関する正規順序表示により

$$e_*^{\alpha' u'+\beta' v'} = e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha'\beta'}e_\diamond^{\alpha' u'+\beta' v'}$$

が得られる．さらに $\alpha u + \beta v = \alpha' u' + \beta' v'$ であるとし，

$$u' = au + bv, \quad v' = cu + dv, \quad ad - bc = 1$$

であるとする．

すると，$e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta}e_\circ^{\alpha u+\beta v}$ と $e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha'\beta'}e_\diamond^{\alpha' u'+\beta' v'}$ とは同一視しなければならないから，次のように定義すべきである：

相互変換 $I_\circ^\diamond$ は稠密な部分空間で定義された線型写像

$$I_\circ^\diamond f = e^{\frac{\hbar i}{2}\partial_{u'}\partial_{v'} - \frac{\hbar i}{2}\partial_u\partial_v} f \tag{2.25}$$

として定義される．

正確に述べれば，(u,v) と (u',v') とが次の一次式

$$u' = au+bv, \quad v' = cu+dv, \quad ad-bc = 1, \quad u = du'-bv' \quad v = -cu'+av'$$

で互いに結びついている場合には作用素

$$\partial_{u'}\partial_{v'} - \partial_u\partial_v = -bd\partial_u^2 + (ad+bc-1)\partial_u\partial_v - ac\partial_v^2$$

の指数関数を考え

$$e^{-bd\partial_u^2+(ad+bc-1)\partial_u\partial_v-ac\partial_v^2} f(u,v) = g(u,v)$$

として得られた $g(u,v)$ の変数 (u,v) を $(du'-bv', -cv'+av')$ に置き換えて $I_\circ^\diamond f(u,v)$ を定義するのである．つまり，

$$I_\circ^\diamond f(u,v) = g(du'-bv', -cv'+av')$$

である．

これらは初めは多項式空間 $\mathbb{C}[u,v]$ に定義されるのだが，次のように拡張される：

定理 2.8 $I_\cdot^\circ$, $I_\circ^\diamond$ は $0 < p \leq 2$ のとき，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ から自分自身への双連続同型写像に拡張される．しかし，これは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ 全体には拡張されない．

$0 < p \leq 2$ の時は $I_\circ^\diamond$ は $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)_\circ; *)$ から $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)_\diamond; *)$ の上への代数としての同型写像である．

証明　証明のためにまず，命題 2.3 によりセミノルム系(2.19)は次のセミノルム系に置き換えて良いということに注意する：

$\tau = \frac{1}{p}$ と置くと，関数 $f = \sum a_{m,n}u^m v^n$ のセミノルムは

$$\|f\|_{\tau,s} = \sum_{m,n} |a_{m,n}|(m+n)^{\tau(m+n)} s^{\tau(m+n)}, \quad s > 0.$$

このセミノルム系は任意の $p > 0$ で $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ と同じフレッシェ空間を定義する．

$\partial_u\partial_v$, ∂_u^2, ∂_v^2 等は互いに可換だから，結局 $e^{\alpha\partial_u\partial_v}$, $e^{\beta\partial_u^2}$, $e^{\gamma\partial_v^2}$ が $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ から自分自

身への連続な線型同型写像に拡張できることを示せば良い．任意の $f=\sum a_{m,n}u^m v^n$ について

$$e^{\alpha\partial_u\partial_v}f=\sum_{m,n,k}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{(m+k)!}{k!}\frac{(n+k)!}{k!}a_{m+k,n+k}u^m v^n$$

であるから，

$$\|e^{\alpha\partial_u\partial_v}f\|_{\tau,s}$$
$$=\sum_{m,n}\sum_{0\le k\le m\wedge n}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{m!}{(m-k)!}\frac{n!}{(n-k)!}|a_{m,n}|(m+n-2k)^{\tau(m+n-2k)}s^{\tau(m+n-2k)}$$
$$<\sum_{m,n}\sum_{0\le k\le m\wedge n}\frac{\alpha^k}{k!}(mn)^{(1-\tau)k}s^{\tau(m+n)}|a_{m,n}|(m+n)^{\tau(m+n)}.$$

$\frac{1}{2}\le\tau$ であるならば，

$$(mn)^{(1-\tau)}\le K(m+n)$$

が分かり，これより

$$\|e^{\alpha\partial_u\partial_v}f\|_{\tau,s}\le|a_{m,n}|(m+n)^{\tau(m+n)}(e^{K/\tau}\alpha s)^{\tau(m+n)}$$

となる．$p\le 2$ のときには $e^{-\alpha\partial_u\partial_v}$ は $e^{\alpha\partial_u\partial_v}$ の逆写像なので，$e^{\alpha\partial_u\partial_v}$ が $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ から自身への線型同型を与えている．

同様の証明で $e^{\beta\partial_u^2}$ 及び $e^{\gamma\partial_v^2}$ の場合にも同様の結果が得られる． □

$p>2$ の場合には上の写像は全体では定義できない．

次のことが成り立つことに注目しよう：任意の $f\in\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ に対して

$$I_{\diamond}^{\diamond'}I_{\circ}^{\diamond}(f)=I_{\circ}^{\diamond'}(f). \tag{2.26}$$

このことは $f\in\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $p>2$ に対しても両辺が定義できていればある程度成立する(次節参照)．しかし，これの定義域とか値域については考える場所が指定されたときに適宜調べなければならない．これはブルバキ的写像ではなく，あくまで，機能としての対応の概念である．

正規順序表示はワイル順序表示に比べて対称性が悪いのだが，(2.26)が成立することから，相互変換を通じて移り合うものを同じ(同値)と見ることが許されるのである．

我々は次のような同一視の原則を採用したい：

定義 2.1 量子正準共役対 $(u,v;\circ)$ による正規順序表示で $A_\circ$ と表示され，別の量子正準共役対 $(u',v';\diamond)$ による正規順序表示で $B_\diamond$ と表示される元があるとする．さらに (u,v) と (u',v') は線型同型で移りあっているものとする．このとき，$A=B$ であるとは量子正準共役対による正規順序表示が相互変換により移り合う，つまり $I_\circ^\diamond(A_\circ)=B$ となることを言う．

ワイル順序表示では表示できない元 A と B でも正規順序表示では表示できる場合があるわけで，そのような場合に上の定義を使うのだが，そのためには (2.26)が成立していないと同値関係として使えないから困るわけである．しかし，次の節で分かるようにこの原則は少しぼやけた形でしか使えないのである．

2.3.2　拡張された相互変換の奇妙な性質

相互変換は空間 $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ には拡張できない．相互変換がどの程度の関数空間まで拡張できるかは良く分かっていないが，相互変換を発展方程式の一部と見ると，$e^{au^2+bv^2+2cuv}$ のような 2 次式の指数関数には相互変換を定義することができる．しかしここで奇妙なことが起こる．この空間での相互変換は $\sqrt{\ }$ の不定性が出て来て 2-対-2 の写像としてしか定義できないのである．とすると定義 2.1 をそのまま言葉どおりの意味で採用するわけにはいかなくなってくるのである．

まず次のような発展方程式を考える：

$$\frac{\partial}{\partial t}f=\hbar i\partial_u\partial_v f. \tag{2.27}$$

これは t について実解析的解は存在すれば一意的であり，初期関数 e^{au+bv} の解は $e^{\hbar iabt}e^{au+bv}$ で与えられている．

そこで，初期関数 $e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+2\gamma uv)}$, の解を得るために

$$f=s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(\phi_1(t)u^2+\phi_2(t)v^2+\phi_3(t)2uv)}$$

のように置くと(2.27)式は常微分方程式系

$$(\phi_1'(t), \phi_2'(t), \phi_3'(t); s'(t)) =$$
$$\big(4i\phi_1(t)\phi_3(t),\ 4i\phi_2(t)\phi_3(t),\ 2i\big(\phi_1(t)\phi_2(t) + \phi_3(t)^2\big);\ 2is(t)\phi_3(t)\big) \tag{2.28}$$

に変わる[注13]．最初の二つから

$$\phi_1(t) = \alpha e^{4i\int_0^t \phi_3(\tau)d\tau}, \quad \phi_2(t) = \beta e^{4i\int_0^t \phi_3(\tau)d\tau}$$

だから，$x(t) = \int_0^t \phi_3(\tau)d\tau$ と置いて

$$x''(t) = 2i\alpha\beta e^{8ix(t)} + 2ix'(t)^2, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = \gamma$$

であり，x を独立変数のように思って $\phi_3(t) = p(x(t))$ と置けば，$\phi_3 = x'$ だから $x''(t) = p\frac{dp}{dx}$ が分かる．これより

$$\frac{1}{2}\frac{dp^2}{dx} - 2ip^2 = 2i\alpha\beta e^{8ix}, \quad p(0) = \gamma$$

が分かり，$p^2(x) = (\gamma^2 - \alpha\beta)e^{4ix} + \alpha\beta e^{8ix}$ を得る．したがって次の式が得られる：

$$e^{\hbar ti\partial_u\partial_v} e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+2\gamma uv)} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-4i\gamma t-4(\gamma^2-\alpha\beta)t^2}}\, e^{\frac{1}{1-4i\gamma t-4(\gamma^2-\alpha\beta)t^2}\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+(\gamma-2i(\gamma^2-\alpha\beta)t)2uv)}. \tag{2.29}$$

$\sqrt{1 - 4i\gamma t + 4(\alpha\beta - \gamma^2)t^2}$ の $\pm$ の不定性は α, β, γ 全体にわたって処理することはできない．

式が複雑なので $(a, b, c; s) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_*$ は $se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ を表すという約束の簡略記号を用いることにする：

$$(a, b, c; s) \Longleftrightarrow se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}.$$

$t = \frac{1}{2}$ とおけば，ワイル順序表示から正規順序表示への相互変換 $I^{\circ}_{\cdot}$ が得られる：

$$(a', b', c'; s') = I^{\circ}_{\cdot}(a, b, c; s) = \frac{1}{1-2ic-D}(a, b, c - iD; s\sqrt{1-2ic-D}). \tag{2.30}$$

注13 このやり方をリー群論的方法と言う．方程式がどの辺で閉じるかが分かっていて，実解析性が期待できるときには強力な方法である．

但し $D=c^2-ab$ である．

命題 2.5 $I^{\circ}_{\cdot}(e_{\cdot}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\cdot v)})$ は $(1-ci)^2+ab=0$ の所でのみ特異点である．

特異点が (u,v) に関する正規順序表示に直せないワイル順序表示の元であるが，この場所の目立った特徴はない．むしろ (u,v) の選び方に強く依存している．

容易に $D'=(c')^2-a'b'=\frac{D}{1-2ic-D}$ が分かるので，逆変換 $I^{\cdot}_{\circ}=(I^{\circ}_{\cdot})^{-1}$ はすぐに計算できるが，これは $t=-\frac{1}{2}$ と置いて得られるものと一致する．実際それは

$$I^{\cdot}_{\circ}(a',b',c';s)=\frac{1}{1+2ic'-D'}(a',b',c'+iD';s'\sqrt{1+2ic'-D'})$$

である．

演習問題 7 $I^{\circ}_{\cdot}(2e_{\cdot}^{\frac{2i}{\hbar}uv})=\sqrt{1}\,e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ を確かめよ．

$e^{t\hbar i\partial_u^2}$ の場合

(u,v) に関する正規順序表示から $(u',v')=(u+v,v)$ に関する正規順序表示への相互変換は $e^{-\frac{\hbar i}{2}\partial_u^2}$ で与えられることに注意して，微分作用素 $\frac{d}{d\tau}f=\hbar i\partial_u^2 f$ を考え，次のように置く：

$$f=s(\tau)e^{\frac{1}{\hbar}(\phi_1(\tau)u^2+\phi_2(\tau)v^2+2\phi_3(\tau)uv)}. \tag{2.31}$$

すると，常微分方程式系

$$\begin{aligned}&(\phi_1'(\tau),\phi_2'(\tau),\,\phi_3'(\tau);\,s'(\tau))\\&\quad=(4i\phi_1(\tau)^2,\,4i\phi_3(\tau)^2,\,4i\phi_1(\tau)\phi_3(\tau);\,2i\phi_1(\tau)s(\tau))\end{aligned}$$

が得られる．これを初期データ $(\phi_1(0),\phi_2(0),\phi_3(0);s(0))=(a,b,c;s)$ で解いて(2.31)式の解は次で与えられる：

$$(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t);s(t))=(\frac{a}{1-4iat},\frac{b+4iDt}{1-4iat},\frac{c}{1-4iat};\frac{s}{\sqrt{1-4iat}}). \tag{2.32}$$

ただし $D=c^2-ab$ である．$t=-\frac{1}{2}$ と置いて相互変換が得られる：

$$(a'',b'',c'';s'')=I^{\diamond}_{\circ}(a,b,c,s)=\frac{1}{1+2ia}(a,\,b-2iD,c;\,s\sqrt{1+2ia}). \tag{2.33}$$

$D''=(c'')^2-a''b''=\frac{D}{1+2ia}$ である．(2.33)式の逆対応は $t=\frac{1}{2}$ と置いて得られる：

$$(a,b,c;s)=(\frac{a''}{1-2ia''},\frac{b''+2iD''}{1-2ia''},\frac{c''}{1-2ia''};\frac{s''}{\sqrt{1-2ia''}}).$$

同様の計算で $e^{t\hbar i\partial_v^2}$ を (2.31)と同様に作用素 $\frac{d}{d\tau}f=\hbar i\partial_v^2 f$ の解として定義する．初期条件 $(\phi_1(0),\phi_2(0),\phi_3(0);s(0))=(a,b,c;s)$ の解は

$$(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t);s(t))=(\frac{a+4iDt}{1-4ibt},\frac{b}{1-4ibt},\frac{c}{1-4ibt};\frac{s}{\sqrt{1-4ibt}}) \tag{2.34}$$

で与えられる．

これより，(u,v) に関する正規順序表示から $(u,u+v)$ に関する正規順序表示への相互変換は次で与えられる：

$$I_{\circ}^{\bullet}(a,b,c;s)=\frac{1}{1-2ib}(a+2iD,b,c;s\sqrt{1-2ib}).$$

これらの結果を総合して，2 次の指数関数の空間に働く一般の相互変換は (2.30), (2.32), (2.34)式を合成して得られることが分かる．

例えば，ワイル順序表示から $\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v,u+v)$ に関する正規順序表示への相互変換 $I_{\cdot}^{\diamond}$ は次で与えられる：

$$I_{\cdot}^{\diamond}(a,b,c;s)=\frac{1}{1+i(b-a)-D}(a-iD,b+iD,c;\sqrt{1+i(b-a)-D}).$$

注目すべきことは 2 次式の指数関数の空間の間の相互変換は振幅の部分に必ず $\pm$ の不定性を持ってしまうということである．相互変換は発展方程式で t の値が $\frac{1}{2}$ のような所として定義されているので，$t=0$ の所に連続的につなげる必要はないがこれを考えても $\pm$ の不定性は消えない．

同じものの表示の変更と思っている相互変換が不定性を持ってくるということは，一意性を確保するためには何か制限を加えなければならなくなることを意味するので興味あることである．

次のことは極地元は大域的には 2 価の元と思わなくてはいけないことを示しているように思われる．そしてこれを支持するのが第 4 章の離散描像である：

命題 2.6 量子正準共役対 $u'=au+bv, v'=cu+dv$, $ad-bc=1$ につい

ては

$$e^{\frac{\hbar i}{2}(-bd\partial_u^2+(ad+bc-1)\partial_u\partial_v-ac\partial_v^2)}\sqrt{-1}e_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}=\sqrt{-1}e_{\diamond}^{\frac{2i}{\hbar}u'\diamond v'}$$

である．但し $\diamond$ は (u',v') に関する正規順序表示を使っていることを示す．

第3章

指数関数(II)

第 1 章で登場した奇妙な元達はすべて 2 次式の指数関数に関係している．この章では 2 次式の指数関数の奇妙な性質をいくつか述べる．これらの性質は古典的微分幾何に慣れた頭ではやや理解に苦しむものばかりであろう．しかしこれらのものは微積分の代数とかワイル代数とかといった見慣れた代数をほんの少し拡張したところで起こることなのである．特にこの章では 2 次式の指数関数は一つの表示方法では表示しきれないという現象に注目する．

数学の世界は点描像を重視したために，これらの異常な現象をいわば臭いものに蓋をする形で避けて通って来たのである．今こそこの蓋を取り払ってこれらのものを白日の下に曝すべき時なのである．そして，そのとき何が見えてこようとも，それが事実なのである．

真空とか半逆元といった可換代数のときには現れなかったものが出て来たのであるが，これを含んだ計算の公式ができていない．これらは実は $*$-積で作った指数関数と深く関係している．この節ではこれを明確にするが，もう少し一般の立場からも指数写像を考える．$\hbar$ が形式的でない時の微積分は $*$-指数関数と真空と半逆元の微積分と言って過言ではない．

$*$-指数関数で一般的に言えることは少ないし，$\exp\{$ 1 次式 $\}$ の形のものは $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元になっていて，これは $*$-積で閉じており，割合簡単だったから今度は $\exp\{$ 2 次式 $\}$ の形のものを考えよう．これは他のものが重要でないという意味ではなく，詳しく計算できるのがこの形までだということである．

3.1　$e_*^{\frac{s}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ の定義と性質

まず，指数写像 $e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)}$ を定義しよう．これは前の方で

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)}=F(t,u,v)$$

と置き，微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,u,v)=(au^2+bv^2+2cu*v)*F(t,u,v),\quad F(0,u,v)=1 \tag{3.1}$$

の実解析的解として定義した．これを普通の微分方程式の形に直すところから始めるが，右辺を計算するためには使う積公式を決めないといけない．

3.1.1　$*$-指数関数のワイル順序表示

まず $u*v=uv-\frac{\hbar i}{2}$ に注意する．これより

$$au^2+bv^2+2cu*v=au^2+bv^2+2cuv-c\hbar i$$

であり，一意性を使うと

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)}=e^{-c\hbar it}e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$$

であるから，$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ が t に関して実解析的に定義出来れば良い．

まず，au^2+bv^2+2cuv に対して，$D=c^2-ab$ を**判別式**と呼ぶ．モイヤル積で計算すると

$$\begin{aligned}(au^2&+bv^2+2cuv)*F(t,u,v)\\&=(au^2+bv^2+2cuv)F+\hbar i\{(bv+cu)\partial_uF-(au+cv)\partial_vF\}\\&\quad-\frac{\hbar^2}{4}\{b\partial_u^2F-2c\partial_v\partial_uF+a\partial_v^2F\}\end{aligned}$$

である．これは線型の偏微分方程式であるが，$D<0$ の時には熱伝導型と呼ばれる型に属するものであり，解の存在定理に関する一般論は難しいものである．しかし，定理 2.1 より実解析的な解は一意的だから，以下では $e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=f_t(au^2+bv^2+2cuv)$ のように解の形を制限して解く．すると，方程式の右辺は

$$
\begin{aligned}
(au^2+bv^2+2cuv)*f_t(au^2+bv^2+2cuv)&\\
=(au^2+bv^2+2cuv)f_t(au^2+bv^2+2cuv)&\\
-\hbar^2(ab-c^2)(f_t'(au^2+bv^2+2cuv)&\\
+f_t''(au^2+bv^2+2cuv)(au^2+bv^2+2cuv))&
\end{aligned}
$$

と計算される．だから，$x=au^2+bv^2+2cuv$ と置くと

$$
\frac{d}{dt}f_t(x)=xf_t(x)-\hbar^2(ab-c^2)(f_t'(x)+xf_t''(x)) \tag{3.2}
$$

という微分方程式を得る．

補題 3.1 微分方程式 (3.2)の初期関数 1 の解は

$$
f_t(x)=\frac{1}{\cosh(\hbar\sqrt{ab-c^2}t)}\exp\{\frac{x}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar\sqrt{ab-c^2}\ t)\}
$$

で与えられる．これは u,v について $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元である．

証明 初期関数が 1 の場合で考える．これを解くには，$f_t(x)=g(t)e^{h(t)x}$ の形を予想し，代入してやると

$$
\{g'(t)+(ab-c^2)\hbar^2g(t)h(t)+xg(t)\{h'(t)-1+(ab-c^2)\hbar^2h(t)^2\}\}e^{h(t)x}=0
$$

となるから，まず $h'(t)-1+(ab-c^2)\hbar^2h(t)^2=0$ となる $h(t)$ を求める．これは変数分離型だからすぐに解けて，

$$
h(t)=\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar(\sqrt{ab-c^2})t)
$$

が得られる．複素数で考えているから $\sqrt{ab-c^2}$ は取り方が二とおりあるが，$\pm\sqrt{ab-c^2}$ の取り方によらずにきまる．次に

$$
g'(t)+g(t)(ab-c^2)\hbar^2\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar(\sqrt{ab-c^2})t)
$$

を解いて，$g(t)=\frac{1}{\cosh(\hbar(\sqrt{ab-c^2})t)}$ が得られる．これも $\pm\sqrt{ab-c^2}$ の取り方によらずにきまる．

この解法においては t は実数に限る必要は全くない． □

ともかく，これより，

$$
e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=\frac{1}{\cosh(\hbar\sqrt{ab-c^2}\,t)}e^{(au^2+bv^2+2cuv)(\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar\sqrt{ab-c^2}\,t)} \tag{3.3}
$$

が得られた．$ab-c^2$ は >0 である必要はないが，$\cosh(is)=\cos s$, $\tanh(is)=i\tan s$ に注意してやれば，

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=\frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{c^2-ab}\;t)}e^{(au^2+bv^2+2cuv)(\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}\tan(\hbar\sqrt{c^2-ab}\,t)}\tag{3.4}$$

とも書かれる．この二通りの書き方は後のほうで係数 a,b,c (実際には a,b,ci) を実数に制限するときに便利である．

$\sqrt{ab-c^2}$ の不定性は違いを生まないが，tan と cos の周期の違いは後々色々な問題を引き起こす．

式(3.3), (3.4)を読むときには，右辺の2次式の判別式を D とし，$D+1$ を見ると，$(\frac{1}{\cosh(\hbar\sqrt{ab-c^2}\;t)})^2$, $(\frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{c^2-ab}\;t)})^2$ などとなっていることに注目するとよい．

$ab-c^2=0$ の時，右辺はマクローリン展開で意味を考えてみれば

$$\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar\sqrt{ab-c^2}\;t)=t$$

と読むべき式だから，

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=e^{t(au^2+bv^2+2cuv)},\quad ab-c^2=0$$

となる．これは $au^2+bv^2+2cuv=(\sqrt{a}u+\sqrt{b}v)^2$ の時には $*$-指数関数と普通の指数関数が一致すると言っているのである[注1]．

以上をまとめると次の定理を得る：

定理 3.1 $*$-指数関数 $e_*^{(au^2+bv^2+2cuv)}$ は

$$\frac{1}{\cosh(\hbar\sqrt{ab-c^2})}\exp\left(\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar\sqrt{ab-c^2})(au^2+bv^2+2cuv)\right)$$

で与えられる．ただし，$ab-c^2=0$ の所では $\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar\sqrt{ab-c^2})=1$ とする．

特に，$c^2-ab=\frac{\pi^2}{\hbar^2}(2m+1)^2$, $m\in\mathbb{Z}$ のとき $e_*^{(au^2+bv^2+2cuv)}=-1$ であり，$c^2-ab=\frac{\pi^2}{4\hbar^2}(2m+1)^2$, $m\in\mathbb{Z}$ のところは特異点である．

[注1] これがモイヤル積公式の特徴である．

解の一意性から指数法則

$$\begin{aligned} e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)} * e_*^{\tau(au^2+bv^2+2cuv)} &= e_*^{(t+\tau)(au^2+bv^2+2cuv)} \\ e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv+\alpha)} &= e^{\alpha t} e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

も得られる．ただし $\alpha \in \mathbb{C}$ である．

奇妙な事柄 2

指数法則を考えると，定理 3.1 は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ が $*$-積に関して代数的に閉じなくなっていることを示している．このこと自体は不思議なことではないが，行なっているのが 1 径数部分群の計算なのだから，代数の元としては存在しなくても，群の元としてなら存在していると考える方が自然であろう．$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元として計算するために発散を起こしていると考えられる．これは，多様体が一枚の座標系では覆えないために座標関数で表示すると見かけ上の特異点が出てくるのに似ている．

3.1.2 交換法則

$*$-指数関数 $e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ の具体的表示から $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元であることが分かるので，これをもとに次のような交換法則を証明しておこう：

系 3.1 $H = au^2 + bv^2 + 2cuv$ を任意に固定したとき，任意の $f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $0 < p < 2$ に対して

$$e_*^{tH} * f = (e^{t\mathrm{ad}(H)} f) * e_*^{tH}, \quad f * e_*^{-tH} = e_*^{-tH} * (e^{t\mathrm{ad}(H)} f)$$

が成立する．

証明 $e_*^{tH} \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ だから系 2.1 により $e_*^{tH} * f$ が定義できている．$g_t = e^{t\mathrm{ad}(H)} f$ とすれば，定理 1.6 で $g_t \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ も分かる．$e_*^{tH} * f$, $g_t * e_*^{tH}$ が同じ微分方程式を同じ初期値で満たしていることを示す：

$$\frac{d}{dt}(g_t * e_*^{tH}) = (\frac{d}{dt} g_t) * e_*^{tH} + g_t * (H * e_*^{tH}).$$

$e_*^{tH} \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$, $g_t, H \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $p < 2$ だから，1 章定理 2.5 及び補題 2.12 より，

$$g_t * (H * e_*^{tH}) = (g_t * H) * e_*^{tH}$$

が成立している．一方，定義より，$\frac{d}{dt}g_t = H * g_t - g_t * H$ だから $\frac{d}{dt}(g_t * e_*^{tH}) = H * (g_t * e_*^{tH})$ が分かる．これは，$e_*^{tH} * f$ がみたしている微分方程式と同じである．他も同様である．□

系 3.1 から次も得られる：

系 3.2 $H = au^2 + bv^2 + 2cuv$ を任意に固定したとき，任意の $f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $0 < p < 2$ に対して

$$e_*^{tH} * (f * e_*^{-tH}) = (e_*^{tH} * f) * e_*^{-tH} = e^{t\mathrm{ad}(H)} f$$

が成立する．

証明　結合律が使えればほとんど明らかである．$f * e_*^{-tH}$ に系 3.1 を使うと

$$e_*^{tH} * (f * e_*^{-tH}) = e_*^{tH} * (e_*^{-tH} * e^{t\mathrm{ad}(H)} f).$$

定理 1.6 より，$e^{t\mathrm{ad}(H)} f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ だから，系 2.1 の注意により

$$e_*^{tH} * (e_*^{-tH} * e^{t\mathrm{ad}(H)} f) = e^{t\mathrm{ad}(H)} f$$

が成立する．□

随伴表現

$\exp t\mathrm{ad}(\frac{i}{2\hbar}(au^2 + bv^2 + 2cuv))$ は $e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)}$ が定義できていて，かつ，$e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * f(u,v) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)}$ がうまく定義できている場合には

$$\begin{aligned} e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} &* f\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)} \\ &= f\left(\exp\left\{2\hbar t \begin{bmatrix} -c & -b \\ a & c \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

のように書いてもよい．しかし，$e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * f(u,v) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)}$ がうまく定義できているというのは結合律

$$\begin{aligned} &(e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * f(u,v)) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)} \\ &\qquad = e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * (f(u,v) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)}) \end{aligned}$$

が成り立つという意味であり，これがないと解の一意性を使って(3.6)の等式を証明できない．定理 1.5，定理 2.5, 定理 2.2 等を参考にするとこのような結

合律がどこまで保証されているかが分かってくるだろう．$e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ が分かっているので $f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $0 < p < 2$ の場合には上の結合律が成立する．このような場合には

$$e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * f(u,v) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)} = \mathrm{Ad}(e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)})f(u,v)$$

のように書く．

$\exp t\,\mathrm{ad}(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv))$ は線型変換としての意味しか持たないが，$e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)}$ は単独で意味を持つ元であり，こちらの方が情報を沢山持っている．実際，解の一意性から $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv+\alpha)} = e^{it\alpha}e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)}$ であり，これは α に依存しているのに対して，$\mathrm{Ad}(e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv+\alpha)})$ では α に関する情報は失われてしまう．この議論は数学では $\mathrm{Ad}(G)$ の形で与えられた群の中心拡大を考える時に現れて来るが，完備ワイル空間こそが実在であるという考えに立てばそこに作用する群よりも，その中に存在している元のほうが現実的に見えるのは当然であろう．

後で必要な公式を一つ与えておく：$e_*^{ituv} * f(u,v) * e_*^{-ituv}$ がうまく定義できているという条件の下で，

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv} * f(u,v) * e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv} = f(-u,-v) \tag{3.7}$$

が成立する．見れば分かるように，$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ はかなり特殊な元で，$f(u,v) = f(-u,-v)$ であるような元と可換になってしまう．

我々の目標の一つは $e_*^{2\,次式}$ の形の元が生成する "群 G" をはっきりさせることであるが，式(3.6)のような交換則は一見かなり強力で，これを使って G の元の表示方法を一定にさせれば群の計算が出来そうにみえる．しかし実際はそうはいかないことが次の演習問題をやってみれば解る．

演習問題 1 前の方の $\mathrm{ad}(v^2)$ の公式に注意を使って，次の交換則を示せ．

$$e^{tv^2} * e^{su^2} = e^{s(u+2\hbar itv)^2} * e^{tv^2} = e^{su^2} * e^{t(v-2\hbar isu)^2}.$$

さらに，上の式は

$$e_*^{tv^2} * e_*^{su^2} = e_*^{s(u+2\hbar itv)_*^2} * e_*^{tv^2} = e_*^{su^2} * e_*^{t(v-2\hbar isu)_*^2}$$

とも書けることを示せ．但し，$(u+2\hbar itv)_*^2 = (u+2\hbar itv)*(u+2\hbar itv)$ である．($e_*^{t(v-2\hbar isu)_*^2}$ は扱いやすい元ではないことに注意.)

ワイル順序表示の時の注意

ここで，ワイル順序表示で元を表示した時の注意を述べておこう．第一にワイル順序表示で2次式を表示したとき，何を量子正準共役としているか式の中では区別がなくなるという問題がある．$c^2-ab=1$ の時には

$$au^2+bv^2+2cuv=2(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v),\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

と書かれるわけだが，これは $-2(-\gamma u-\delta v)(\alpha u+\beta v)$ と書いても良い．つまり，uv は (u,v) を量子正準共役対として uv を書いたのか，$(-v,u)$ を量子正準共役対として $-(-v)u$ を書いたのか区別されていないということである．

これは後の方で $e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv}$ と $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(-v)u}$ を区別して考えるべきかどうかという問題として現われる[注2]．

後の方でこの問題を考える時に特に必要になる部分を抜きだしておこう：

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(uv-\frac{\hbar i}{2})}=-ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}, \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}uv}=\sqrt{2}\,e^{\frac{2}{\hbar}uv},\quad e_*^{\frac{\pi}{4\hbar}(u^2-v^2)}=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)},\\ e_*^{\frac{\pi}{4\hbar i}(u^2+v^2)}=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{\hbar i}(u^2+v^2)}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

この計算では

$$\frac{1}{2}(u^2-v^2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v),\quad \frac{1}{2i}(u^2+v^2)=\frac{1}{\sqrt{2i}}(u-iv)\frac{1}{\sqrt{2i}}(u+iv)$$

と変形し，命題1.3を使っている．

第二の注意としては，このように $*$-指数関数はワイル順序表示では普通の関数として $se^{\frac{1}{\hbar}au^2+bv^2+2cuv}$ の形に表示できるのだが，前章の随伴表現の方はこの関数空間の位相に関しては連続にならないということである．たとえば，$e_*^{\frac{t}{\hbar}2iuv}=\frac{1}{\cosh t}e^{\frac{1}{\hbar}(\tanh t)\,2iuv}$ だから，ワイル順序表示では $\lim_{t\to\pm\infty}e_*^{\frac{t}{\hbar}2iuv}=0$ であるが，$\lim_{t\to\pm\infty}\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{t}{\hbar}2iuv})$ は0にはならない．

一方，式(3.3)は $\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar\sqrt{ab-c^2}t)=s$ と置いて次のようにも書き換えられる：

$$e^{s(au^2+bv^2+2cuv)}=\cosh(\hbar t\sqrt{ab-c^2})e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}. \tag{3.10}$$

注2　しかし，この本では完全な解決には到らない．この問題はかなり根が深いのである．

$\tanh z$ は ±1 という値を取れないので，これより次が分かる：

補題 3.2 $c^2-ab+1\neq 0$ の時，$\pm\sqrt{c^2-ab+1}\,e^{au^2+bv^2+2cuv}$ は $e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ の形に書かれる．また，$c^2-ab+1=0$ の時，$e^{au^2+bv^2+2cuv}$ が $r(t)e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ の形に書かれることはない．

(3.10)と指数法則を組み合わせると次の公式が容易な計算で得られる：

補題 3.3 $1+s\sigma(ab-c^2)\neq 0$ なる $s,\sigma\in\mathbb{C}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&e^{s(au^2+bv^2+2cuv)} * e^{\sigma(au^2+bv^2+2cuv)}\\
&\qquad=\frac{1}{1+s\sigma\hbar^2(ab-c^2)}e^{\frac{s+\sigma}{(1+s\sigma\hbar^2(ab-c^2))}(au^2+bv^2+2cuv)}.
\end{aligned}
$$

この公式は奇妙なことを述べている．f,g は $\hbar$ を含まぬ $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元なのに $*$-積 $f*g$ が $1+s\sigma\hbar^2(ab-c^2)=0$ の所で発散を起こして計算できないことがあると言っている．

結合律は次の演習問題で試してみてもらいたい：

演習問題 2 $(a,s),(b,t)$, $st\neq -1$ に対し，$\odot$-積を $(a,s)\odot(b,t)=(\frac{ab}{1+st},\frac{s+t}{1+st})$ と定義する．このとき次を示せ：

(1) $(a,r)\odot((b,s)\odot(c,t))=((a,r)\odot(b,s))\odot(c,t)$, $(1,0)\odot(a,t)=(a,t)$, $(a,s)\odot(b,t)=(b,t)\odot(a,s)$.

(2) $a\neq 0$, $s\neq\pm1$ ならば $(a,s)\odot(\frac{1-s^2}{a},-s)=(1,0)$.

(3) $s,t\geq 0$ ならば $(a,s)\odot(b,t)$ の第二成分も ≥ 0, $s,t\leq 0$ ならば $(a,s)\odot(b,t)$ の第二成分も ≤ 0.

(4) $(\sqrt{1-s^2},\,s)\odot(\sqrt{1-t^2},\,t)$ は再び $(\sqrt{1-r^2},\,r)$ の形に書かれる．

補題 3.3 より，$c^2-ab+1=0$ なら，複合同順で

$$2e^{\pm\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} * 2e^{\pm\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = 2e^{\pm\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

が分かる．これは係数a, b, cに依存するが，冪等元なのでこれも**真空**(vacuum)と呼ぶことにする．

$\alpha\delta-\beta\gamma=1$の時$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)}=ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}(\alpha u+\beta v)*(\gamma u+\delta v)}$はモイヤル積公式で計算すると発散してしまうのだが，後の方の補題3.8でΨDO-積公式で計算できることを示す．上の元を**極地元**(polar element)と呼ぶことにする．

この定義だけからすると，極地元は沢山あるように見えるが，実は2点からなる集合と見なければならないことが後で示される．

3.1.3　e_*^{ituv}の計算

モイヤル積公式が$SL(2,\mathbb{C})$の変換で不変なことからe_*^{ituv}の計算が$c^2-ab\neq 0$の場合を代表していることが分かっているので，この場合を詳しく調べよう．e_*^{ituv}は(3.2)式をちょっと変えた微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(x)=ixF_t(x)+i\frac{\hbar^2}{4}F_t'(x)+i\frac{\hbar^2}{4}F_t''(x)x,\qquad F_0(x)=1 \tag{3.11}$$

を初期条件1で解いて，

$$e_*^{ituv}=\frac{1}{\cosh\frac{\hbar t}{2}}e^{\frac{2iuv}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}} \tag{3.12}$$

として定義しても同じである．tは複素数としてよい．

$$\begin{aligned} e_*^{itv*u}&=e_*^{ituv-\frac{\hbar t}{2}}=\frac{2}{e^{\hbar t}+1}e^{\frac{2iuv}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}},\\ e_*^{itu*v}&=e_*^{ituv+\frac{\hbar t}{2}}=\frac{2e^{\hbar t}}{e^{\hbar t}+1}e^{\frac{2iuv}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

が容易に分かる．これよりt, sを実数の範囲で動かして

$$\lim_{t\to\infty}e_*^{itv*u}=0=\lim_{s\to\infty}e_*^{-isu*v}, \tag{3.14}$$

$$\lim_{t\to\infty}e_*^{itu*v}=\varpi_{00}\ (=2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}),\qquad \lim_{s\to-\infty}e_*^{isv*u}=\bar{\varpi}_{00}(=2e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}) \tag{3.15}$$

が分かる．これで，前章 1.4.2 節で述べた真空が $*$-積の言葉で説明されたことになる．$\varpi_{00} * \varpi_{00} = \varpi_{00}$ のような等式は出て来て当然だと分かるであろう．

指数法則より $e_*^{itu*v} * e_*^{-itu*v} \equiv 1$ であるから，ちょっと目には $1 = 2e^{\frac{2iuv}{\hbar}} * 0 = 0$ という矛盾があるように見えるかもしれないが，これは $*$-積は(発散して定義できないこともあるのだから)C^∞ 位相に関して必ずしも連続でないと言っているだけである．

さらに次のことも分かる：

$$\lim_{t\to\infty} e_*^{\pm ituv} = 0. \tag{3.16}$$

演習問題 3 指数法則を用いて $\varpi_{00} * \varpi_{00} = \varpi_{00}$, $\bar{\varpi}_{00} * \bar{\varpi}_{00} = \bar{\varpi}_{00}$, $\varpi_{00} * \bar{\varpi}_{00} =$ 発散，を示せ．(最後の式を出すには，$e_*^{itu*v} * \bar{\varpi}_{00} = e^{t\hbar}\bar{\varpi}_{00}$ を示し，$\lim_{t\to\infty}$ を計算する．)

e_*^{itu*v} は多項式近似で定義したのではないが，次のような公式が得られる：

補題 3.4 (球撞き補題) $v * e_*^{itu*v} = e_*^{itv*u} * v$, $e_*^{itu*v} * u = u * e_*^{itv*u}$ が成立する．

証明 球撞きみたいに $u * (v * u)^m = (u * v)^m * u$ だから，多項式近似が成立していれば明らかである．この場合は両辺が同じ微分方程式を同じ初期値で満たす実解析的な解であることより証明される．つまり，$v*$ の連続性と結合律より

$$\frac{d}{dt} v * e_*^{itu*v} = v * ((iu * v) * e_*^{itu*v}) = iv * u * (v * e_*^{itu*v}).$$

一方 $*v$ の連続性と結合律より

$$\frac{d}{dt} e_*^{itv*u} * v = ((iv * u) * e_*^{itu*v}) * v = iv * u * (e_*^{itu*v} * v)$$

である．どちらも $\frac{d}{dt} f_t = iv * u * f_t$ なる微分方程式を満たしており，初期条件は v である．次の式も全く同様である． □

一方，微分方程式 $(uv) * F(uv) = 0$, $F(uv) * (uv) = 0$ を考えると，どちらの式からも，$s = uv$ と置いて

$$sF(s) + \frac{\hbar^2}{4} F'(s) + \frac{\hbar^2}{4} F''(s)s = 0$$

が得られる．$s=(\hbar x)/2$ と変数変換し，$f(x)=F(\frac{\hbar x}{2})$ と置くと，

$$xf''(x)+f'(x)+xf(x)=0$$

という微分方程式になる．これはベッセル(Bessel)の微分方程式で，これの $f(0)=1$ の解は級数解法で

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

となる．右辺はベッセル関数の記号で $J_0(x)$ と書かれるから，これを使って $F(uv)=CJ_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ と求まる．つまり，

$$(uv)*J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=0 \tag{3.17}$$

である．これを $xf(x)=0$ のように考えると不思議な式に見えるであろうが，後の(3.19)で分かるように，超関数で $x\delta(x)=0$ に対応する式である．

式 (3.17)より，当然 $e_*^{tuv}*J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ と思うかもしれないが，これは注意すべきことである．微分方程式 $\frac{d}{dt}f_t=(iuv)*f_t$ の初期値 $J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ の t に関して実解析的な解が $J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ であるから定理 2.2 の所の定義に従えばこれは正しいが，$e_*^{tuv}*J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ が t に関して実解析的となるように計算されたとすると，$e_*^{tuv}*J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ でなければならないが，前の計算で $e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}uv}=-1$ であるから，

$$-J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}uv}*J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$$

となってしまう．これは一見矛盾に見える．

系 3.3 複素平面内で 0 と 2π を結ぶどんな曲線 $a(t)$ に沿っても

$$e_*^{\frac{\alpha(t)}{\hbar}uv}\hat{*}J_0(\frac{2}{\hbar}uv):=\lim_{N\to\infty}e_*^{\frac{\alpha(t)}{\hbar}uv}*\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}e_*^{isuv}ds$$

が実解析的になることはない[注3]．

注3 しかし，直接このことを計算でたしかめているわけでないので，どんな風に実解析性が失われるのか良く分からない．計算すると $f(t)J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ のようになっているのではないかと想像している．

一般のベッセル関数 J_n にはハンセン・ベッセル(Hansen-Bessel)の公式:

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos t}e^{in(t-(\pi/2))}dt,\quad n=0,1,2,\dots$$

があるが，$z=\frac{2}{\hbar}uv$ とした式と式(3.12)を見比べて，$\cos\tau=\tanh\frac{\hbar t}{2}$ と変換すれば,

$$J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\frac{\hbar t}{2}}e^{\frac{2i}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}uv}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{ituv}dt \qquad (3.18)$$

であることが分かる．これは δ-関数が出てくるフーリエ変換の形だから

$$J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta_*(uv) \qquad (3.19)$$

のように書いて良いであろう．

複素平面内で 0 と 2π を結ぶ曲線 $a(t)$ として例えば $a(t)=-\frac{1}{2}\pi(e^{\pi it}-1)$ としてやると,

$$\pi e_*^{\frac{a(t)}{\hbar}uv}\hat{*}J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=\lim_{N\to\infty}e_*^{\frac{a(t)}{\hbar}uv}*\int_{-N}^{N}e_*^{isuv}ds.$$

指数法則より $e_*^{\frac{a(t)}{\hbar}uv}*e_*^{isuv}=e_*^{(is+a(t))uv}$ で，これは t,s に関して実解析的であり，右辺のワイル順序表示を使えば t を止めるごとに s について $(-\infty,\infty)$ で一様連続であることが分かる．したがって,

$$\pi e_*^{\frac{a(t)}{\hbar}uv}*J_0(\frac{2}{\hbar}uv)=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}e_*^{\frac{a(t)}{\hbar}uv}*e_*^{isuv}ds=\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{\frac{a(t)}{\hbar}uv}*e_*^{isuv}ds$$

で，右辺は存在し，t に関して連続になる.（実際には C^∞ となる.） しかし，$\int_{-N}^{N}e_*^{\frac{a(t)}{\hbar}uv}*e_*^{isuv}ds$ は実解析的だが，系 3.3 を見れば，極限は t に関して実解析的ではないことになる[注4].

$e^{isuv}*e^{ituv}$ の公式(指数法則)を用いれば，$\delta_*(uv)*\delta_*(uv)$ が計算できそうにみえるが，これは発散する．発散の理由は $((uv)_+^{-1}-(uv)_-^{-1})^2$ の計算で，$(uv)_+^{-1}*(uv)_+^{-1}$, $(uv)_-^{-1}*(uv)_-^{-1}$ は収束するのに，$(uv)_+^{-1}*(uv)_-^{-1}$ などが発散するからである．

注4 こんな状態で我々は微積分が分かっていると言って良いのだろうか？ 我々に分かっているのは微積分学が無矛盾だということだけである．だから，そこから何が出てこようとそれは事実なのだということである

複素変数で見る

これまでは $e_*^{\frac{t}{\hbar}2iuv}=\frac{1}{\cosh t}e^{\frac{2iuv}{\hbar}\tanh t}$ という式を主に使って考えて来たが，$t=z$ としてこれを複素変数としてみよう．すると，uv には無関係に特異点は虚軸上に等間隔に並ぶ．そのうちの一つを考えて，これが原点になるように座標系を平行移動すると，そこでは右辺の関数は

$$(\frac{1}{z}+a_0+\cdots)\,e^{\frac{2uv}{\hbar}(\frac{1}{z}+b_0+\cdots)}$$

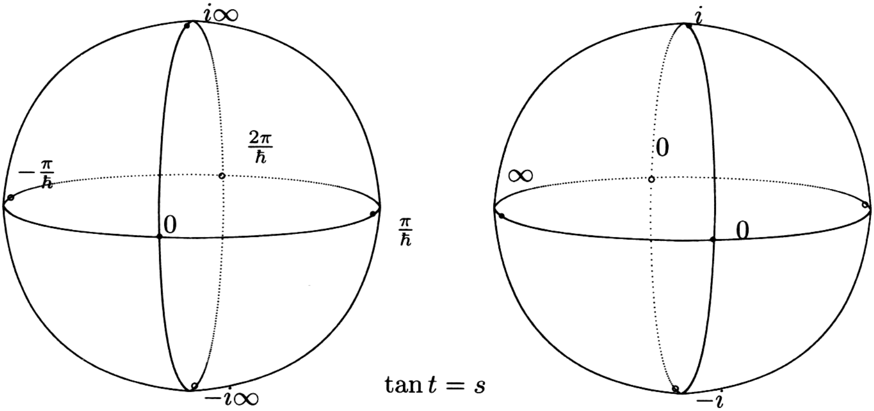
のように書かれていることが分かるが，原点での留数はさほど簡単ではない．$e_*^{\frac{z}{\hbar}2uv}$ の特異点はすべて真性特異点である．しかし，

$$-\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{\frac{it}{\hbar}2uv}dt+\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{\frac{1}{\hbar}(it+\pi)2uv}dt$$

は留数だけで計算できる姿であり，$2\pi i\mathrm{Res}(e_*^{\frac{iz}{\hbar}2uv};z=-\pi i)$ となる．ところが，$e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}uv}=-1$ だから上の量は $-2\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{\frac{it}{\hbar}2uv}dt=-2\pi J_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ であり，これより，$\mathrm{Res}(e_*^{\frac{iz}{\hbar}2uv};z=\frac{\pi}{2})=iJ_0(\frac{2}{\hbar}uv)$ が分かる．

リーマン面での考え方

$s=\tan t$ と置いてみると $e_*^{\frac{t}{\hbar}2uv}=\sqrt{1+s^2}e^{\frac{s}{\hbar}uv}$ という式が成立している．



しかし，$\sqrt{1+s^2}$ の $\pm$ の不定性を正しく理解するためには右辺を $\sqrt{1+s^2}$ のリーマン面上で考えないといけない．

3.1.4　二つの逆元

式 (3.12)を用いると $\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{ituv}dt$ は収束する．さらに $(iuv)*$ の連続性を用いると

$$(iuv)*\int_0^{\infty} e_*^{ituv}dt = \int_0^{\infty}(iuv)*e_*^{ituv}dt = \int_0^{\infty}\frac{d}{dt}e_*^{ituv}dt = -1$$

でもある．2.1.1 節を思い出すと uv についても相異なる二つの逆元が定義できる[注5]ことが分かる(つまり，結合律が破れているということ)：

$$(uv)_+^{-1} = -i\int_0^{\infty} e_*^{ituv}dt, \qquad (uv)_-^{-1} = i\int_{-\infty}^{0} e_*^{ituv}dt.$$

判別式が零でない 2 次式は uv で代表されるから $(uv)_\pm^{-1}$ を詳しく見よう：$u*v = uv-\frac{\hbar i}{2}$, $v*u = uv+\frac{\hbar i}{2}$ であり

$$e_*^{itv*u} = e^{-\frac{\hbar t}{2}}e_*^{ituv}, \quad e_*^{itu*v} = e^{\frac{\hbar t}{2}}e_*^{ituv}$$

である．

$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ では (3.13)を使うと uv に関して次のことが分かる：

補題 3.5 uv, $v*u = uv+\frac{\hbar i}{2}$, $u*v = uv-\frac{\hbar i}{2}$ は可逆であり，逆元はそれぞれ，

$$(uv)_\pm^{-1} = \mp i\int_0^{\infty} e_*^{\pm ituv}dt, \quad (v{*}u)_+^{-1} = -i\int_0^{\infty} e_*^{itv*u}dt,$$
$$(u{*}v)_-^{-1} = i\int_0^{\infty} e_*^{-itu*v}dt$$

で与えられる．

$(v{*}u)_+^{-1}$ は存在しているが，$(v{*}u)_-^{-1}$ は存在しない．また，$(u{*}v)_-^{-1}$ は存在しているが，$(u{*}v)_+^{-1}$ は存在しない．uv には逆元が二つあるのだから結合律は当然破れている．だから $(u{\cdot}v)_+^{-1}$ と $(u{\cdot}v)_-^{-1}$ とを同じ(結合律を満たす)代数の中で取り扱うことはできない．実際，$(u{\cdot}v)_+^{-1}*(u{\cdot}v)_-^{-1}$ は発散する．

注5 次章も参照のこと．

左右の半逆元と積分順序

補題 3.5 を使うと，v は右逆元

$$v^{\circ} = -iu * \int_0^{\infty} e_*^{itv*u} dt = -i \int_0^{\infty} u * e_*^{itv*u} dt$$

を持つ．$u * e_*^{itv*u}$ をモイヤル積公式で計算し，変数変換で積分を計算すれば

$$v^{\circ} = -i \int_0^{\infty} \frac{4e^{\hbar t}}{(e^{\hbar t}+1)^2} u e^{\frac{2iuv}{\hbar} \tanh \frac{\hbar t}{2}} dt = \frac{1}{v}\left(1 - e^{\frac{2i}{\hbar}uv}\right) \tag{3.20}$$

が分かる．さらに v は左逆元 $v^{\bullet} = i\int_0^{\infty} e_*^{-itu*v} dt * u$ を持つ．これらは，$v^{\circ} = u * (v * u)_+^{-1}$, $v^{\bullet} = (u * v)_-^{-1} * u$ 等と書くことができる．同様に u は左逆元

$$u^{\bullet} = -i \int_0^{\infty} e_*^{itv*u} * v dt = \frac{1}{u}\left(1 - e^{\frac{2i}{\hbar}uv}\right) = (v * u)_+^{-1} * v$$

を持つと同時に右逆元

$$u^{\circ} = iv * \int_0^{\infty} e_*^{-itu*v} dt = \frac{1}{u}\left(1 - e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}\right) = v * (u * v)_-^{-1}$$

も持つことが分かる．ワイル順序表示で詳しく計算してみればこれらの半逆元は 1 章で与えたものと一致することが分かる．

$u^{\bullet}$, u°, $v^{\bullet}$, v° 達はすべて $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元として得られている．

これらは純逆元ではなくて

$$v^{\circ} * v = 1 - \varpi_{00} \quad u * u^{\bullet} = 1 - \varpi_{00} \quad u^{\circ} * u = 1 - \bar{\varpi}_{00} \quad v * v^{\bullet} = 1 - \bar{\varpi}_{00} \tag{3.21}$$

となる．このことは球撞き補題 3.4 を使って次のように計算で確かめられる：

$$\left(-u*i\int_0^{\infty} e_*^{itv*u} dt\right)*v = -\int_0^{\infty} (iu*v)*e_*^{itu*v} dt = 1 - \lim e_*^{itu*v} = 1 - \varpi_{00}.$$

これらはすべて $\hbar$ に関して実解析的ではあるが，$\hbar = 0$ までは定義できないので，結合律が自動的に成立すると考えることはできない．実際，$u^{\bullet} * u^{\circ}$ のようなものは計算すると発散する．これは矛盾でも何でもなくて，完備ワイル空間というのは結合代数をなしていないだけのことである．この中から結合代数部分を抜き出すかということが問題なのだが，組織的に行う方法は知られていない．

一つの元が左右の半逆元を持つのだから，結合律が成立していれば $v{*}v^\circ=1$ の両辺に左から $v^\bullet$ をかけて $v^\circ=v^\bullet$ となり，矛盾となる．この現象は奇妙でも何でもなくて，広義積分で定義された元の二重極限を勝手に順序交換したために起こることであることを見ておこう：

$$v^\bullet*(v*v^\circ)=\lim_{T\to\infty}\lim_{S\to\infty}\int_0^T e_*^{-itu*v}*(iu)*dt*\Big(v*\int_0^S(-iu)*e_*^{isv*u}ds\Big)$$

であり，この式は積分記号下では結合律が成立しているから

$$v^\bullet*(v*v^\circ)=\lim_{T\to\infty}\lim_{S\to\infty}\int_0^T\int_0^S(e_*^{-itu*v}*u*v*u*e_*^{isv*u})dsdt$$

と書いて良い．もう少し計算すると

$$v^\bullet*(v*v^\circ)=\lim_{T\to\infty}\lim_{S\to\infty}\int_0^T\int_0^S e^{-\frac{\hbar}{2}(t+s)}e_*^{-ituv}*(u*v*u)*e_*^{isuv}dsdt$$

となる．全く同様に

$$(v^\bullet*v)*v^\circ=\lim_{S\to\infty}\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_0^S e^{-\frac{\hbar}{2}(t+s)}e_*^{-ituv}*(u*v*u)*e_*^{isuv}dsdt$$

となる．$u{*}v$ と e_*^{-ituv} は可換だから，球撞き補題から得られる等式

$$u*e_*^{isuv}=e^{\hbar s}e_*^{isuv}*u,\quad v*e_*^{ituv}=e^{-\hbar t}e_*^{ituv}*v$$

を用いて計算すると，

$$v^\bullet*(v*v^\circ)=(u*v)*\Big(\lim_{T\to\infty}\lim_{S\to\infty}\int_0^T\int_0^S e^{\frac{\hbar}{2}(s-t)}e_*^{i(s-t)uv}dsdt\Big)*u$$

$$(v^\bullet*v)*v^\circ=(u*v)*\Big(\lim_{S\to\infty}\lim_{T\to\infty}\int_0^T\int_0^S e^{\frac{\hbar}{2}(s-t)}e_*^{i(s-t)uv}dsdt\Big)*u$$

となる．$e_*^{i(s-t)uv}=\frac{1}{\cosh\hbar(s-t)}e^{\frac{2i}{\hbar}uv\tanh\frac{\hbar(s-t)}{2}}$ であったから，広義重積分は存在しないし，極限の順序が交換できないことは明らかであろう．結合律が成立するということと上の極限の順序が交換できるということは同じことであることが分かる．

e_*^{ituv} はこれ以外にも奇妙なふるまいをする．その部分を抜きだしておくと

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=\text{極地元},\quad e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}uv}=-1,\quad e_*^{\frac{4\pi}{\hbar}uv}=1 \tag{3.22}$$

となる．これが奇妙に見えるのは次のような理由である．$x=\frac{1}{\hbar i}uv$ と置いて x を変数のように考え $*$-積を使って多項式 $a_0x_*^n+a_1x_*^{n-1}+\cdots+a_n$ や e_*^{itx} を考え始めると，これで1変数の可換な関数環ができている．こういう場合我々は普通 x を何かある集合上を動く不定元のように考えたくなるのだが $e_*^{2\pi ix}=-1$,　$e_*^{4\pi ix}=1$ のようになるためには $x=\frac{1}{\hbar}uv$ は $\{\frac{1}{2}(2m+1); m\in\mathbb{Z}\}$ を動く不定元のように考えたくなるのである．後章の定理 4.3 で x は

$$\{\frac{1}{2}(2m+1); m=0,1,2,\ldots\} \text{ または } \{-\frac{1}{2}(2m+1); m=0,1,2,\ldots\}$$

を動く不定元のように見えることを示す．どちらにすべきかは理論がきめることではなく，自由に選べるが両方同時に選ぶと結合律を壊すことが分かる[注6]．この見方を **2次形式の離散描像**と呼んでおこう．

このように見えてしまうだけでかなり奇妙なのだが，そうすると，こんどは $e_*^{\pi ix}$ は確定した値を持つのではなく，$\{\pm i\}$ という集合上を動く不定元のように見えてしまうのである．この場合の関数記号 $e_*^{\pi ix}$ は単に**不定元に対して行う操作**(function)の意味しかないのだが，あえて写像として意味を付けようとすれば $\mathbb{N}$ から $\{\pm i\}$ への写像 $i(-1)^m$ ということになる．あとの方(5章，10章)で極地元は2価の元のように考えないとつじつまが合わないような計算が出て来るが，そこまでくると極地元が集合 $\{\pm i\}$ 上を動く不定元のように見えるのはむしろ自然なことだということが分かる．

3.1.5　真空表現

実はこのような描像が一方では極めて自然なものであることを真空表現[注7]を考えることで見よう．$Hol(\mathbb{C})$ を整関数の全体とし，ここに作用する演算子として上の代数を実現してみよう．$f\in\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C})$ として

$$u:\ f(u)*\varpi_{00}\to u*(f(u)*\varpi_{00})=uf(u)*\varpi_{00},$$
$$v:\ f(u)*\varpi_{00}\to v*(f(u)*\varpi_{00})=\hbar i\partial_u f(u)*\varpi_{00}$$

注6 全く同様のことが「時間」という物理概念についても起こっており，時間の向きはどちらを選んでも理論は対称にできているのだが，両方を同時に選ぶと因果律を壊すのでどちらかを選ばなければならない．

注7 2.1 節参照．

とする．このとき，$u*v$ は

$$f(u)*\varpi_{00}\to \hbar iu\partial_u f(u)*\varpi_{00}$$

なる演算子であり，$f(u)$ をマクローリン展開して $\sum a_m u^m$ と書けば $\hbar iu\partial_u$ は固有値 $\hbar i\{0,1,2,\ldots\}$ のみを持つ作用素となることが分かる．$\hbar iu\partial_u-\lambda$ は $\lambda\notin\hbar i\mathbb{N}$ ならば可逆である．しかし，我々は上の固有値の性質から $u*v$ の離散描像を得た訳ではない．$u*v$ の離散描像は作用素表現とは無関係に代数のほうから得られているのである．$uv=u*v+\frac{1}{2}\hbar i$ に注意する．

注意　e_*^{tu*v} が任意の $t\in\mathbb{C}$ で定義されていることに注目してもらいたい．実は上の表現は正規順序表示で考えるほうが適しているのであって，そのことが現れている．その代わり，$e_*^{t(au^2+bv^2)}$, $ab\neq 0$, の場合はある t で発散してしまう．

さらに

$$e_*^{tu*v}:\ u^m*\varpi_{00}\to e^{\hbar itm}u^m*\varpi_{00}$$

であるから，$e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}u*v}=-e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}uv}=1$, $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=\{\pm i\}$ 等にも合致する．また ϖ_{00} は演算子としては，

$$\varpi_{00}:\ h(u)*\varpi_{00}\to\varpi_{00}*(h(u)*\varpi_{00})=(\varpi_{00}*h(u))*\varpi_{00}=h(0)\varpi_{00}$$

である[注8]．しかし，$\bar\varpi_{00}$ の真空表現は発散する．

v° が積分演算子になっていることを見ておこう．これは物理では固有値のほうから計算するのだが，ここでは代数の方の計算だけで出してみよう．

$$v^\circ*(f(u)*\varpi_{00})=-i\int_0^\infty u*e_*^{itv*u}*(f(u)*\varpi_{00})dt$$

であるから，まず $e_*^{itv*u}*(f(u)*\varpi_{00})$ を計算する．これは定義より

$$\frac{d}{dt}F_t=iv*u*F_t,\ \ F_0=f(u)*\varpi_{00} \tag{3.23}$$

の実解析的解のことである．そこで結合律が成立すると思って計算してみると，交換則を使って $e_*^{itv*u}*f(u)=f(e^{-\hbar t}u)*e_*^{itv*u}$ である．さらに $e_*^{itv*u}*\varpi_{00}$ を考えるのだが，これも $\frac{d}{dt}G_t=iv*u*G_t, G_0=\varpi_{00}$ の実解析的解のことであるから，$\frac{d}{dt}e^{-\hbar t}\varpi_{00}=iv*u*e^{-\hbar t}\varpi_{00}$ より $e_*^{itv*u}*\varpi_{00}=e^{-\hbar t}\varpi_{00}$ が

注8 ここの結合律については 3.2.4 節参照．

分かる．これを使うと

$$e_*^{itv*u} * (f(u) * \varpi_{00}) = f(e^{-\hbar t}u) * e^{-\hbar t}\varpi_{00}$$

が得られるが，右辺は(3.23)の実解析的解でもあるから，結局上の等式が成立する．したがって

$$v^\circ * (f(u) * \varpi_{00}) = -i\int_0^\infty e^{-\hbar t}u * f(e^{-\hbar t}u) * \varpi_{00}dt.$$

$\tau = e^{-\hbar t}u$ と変数変換すれば

$$v^\circ * f(u) * \varpi_{00} = \frac{i}{\hbar}\int_u^0 f(\tau)d\tau * \varpi_{00} = \frac{1}{\hbar i}\int_0^u f(\tau)d\tau * \varpi_{00}$$

となるのである．

同様の計算で

$$u^\bullet * f(u) * \varpi_{00} = \frac{1}{u}(f(u) - f(0)) * \varpi_{00}$$

が分かる．しかし，$v^\bullet, u^\circ$ を真空表現してみるとどちらも発散する．

結局 $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C})$ を含み，微分，積分，$e^{au+bv}, (a, b \in \mathbb{C})$, ϖ_{00} を含んだ結合代数が $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中に含まれていることが分かる．

演習問題 4 $e_*^{tv} * h(u) * \varpi_{00} = \mathrm{Ad}(e_*^{tv})(h(u)) * e_*^{tv} * \varpi_{00}$, $e_*^{tv} * \varpi_{00} = \varpi_{00}$, および $\mathrm{Ad}(e_*^{tv})(h(u)) = h(u + \hbar it)$ を示せ．

これで分かるように，**微積分の代数はワイル代数の方から見るとすでに対称性を破って作られている**のであるが，演算子としての表現を持っているので，結合律は自然に保たれているのである．

複素真空による真空表現

u, v は今まで通りの量子正準共役対として

$$z = u + iv, \quad \bar{z} = u - iv$$

と複素数の形に変数変換すると，$[z, \bar{z}] = -2\hbar$ となる．$\mathbb{C}[\zeta, \bar{\zeta}, \hbar]$ を $\hbar$ の多項式を係数とする $\mathbb{C}^2$ 上の多項式全体の空間とする．

ヴィック(Wick)代数 W とはワイル代数を変数変換しただけのもので，空間 $\mathbb{C}[\zeta, \bar{\zeta}, \hbar]$ にモイヤル積公式と等価な積公式

$$f(z,\bar{z}) * g(z,\bar{z}) = f(z,\bar{z}) \exp \hbar\{\overleftarrow{\partial_{\bar{z}}} \dot{\wedge} \overrightarrow{\partial_z}\} g(z,\bar{z}) \tag{3.24}$$

で積を定義したものである．この積公式を**エルミート型の積公式**と呼んでおこう．ただし，

$$f\left(\overleftarrow{\partial_{\bar{z}}} \cdot \overrightarrow{\partial_z} - \overleftarrow{\partial_z} \cdot \overrightarrow{\partial_{\bar{z}}}\right) g = \sum\nolimits_i (\partial_{\bar{z}_i} f \partial_{z_i} g - \partial_{z_i} f \partial_{\bar{z}_i} g)$$

である．

$e_*^{tz\bar{z}}$ の計算

エルミート型の積公式でも補題 3.1 と同様の計算で

$$e_*^{tz\cdot\bar{z}} = \frac{1}{\cosh \hbar t} e^{z\cdot\bar{z}\frac{1}{\hbar}\tanh \hbar t} \tag{3.25}$$

が分かる．補題 3.3 と同様に，(3.25)より指数法則を書き直して

$$e^{s\frac{z\cdot\bar{z}}{\hbar}} * e^{t\frac{z\cdot\bar{z}}{\hbar}} = \frac{1}{1+st} e^{\frac{s+t}{1+st}\frac{z\cdot\bar{z}}{\hbar}} \tag{3.26}$$

が得られる．

$z\cdot\bar{z} = u^2+v^2$ だから，$e_*^{tz\cdot\bar{z}} = e_*^{t(u^2+v^2)}$ である．熱核の類推から $t \leq 0$ のような条件があるように思うかも知れないが，ここでは何の条件も付かない．

$\int_{-\infty}^{\infty} e_*^{tz\cdot\bar{z}} dt$ も収束する．これも u,v を $\mathbb{R}$ に制限しないで成立する．

$z,\bar{z}$ を使う計算は u,v を使う計算と全く並行している．したがって，真空表現も上で u,v を使って述べたのと全く同様になる．

以下この本では u,v を使って主に話しを進めるが，全く同様に $z,\bar{z}$ を使っても話ができるのである．

$z * \bar{z} = z\cdot\bar{z} - \hbar$ だから，

$$\lim_{t\to\infty} e_*^{-tz*\bar{z}} = 2e^{-\frac{z\cdot\bar{z}}{\hbar}} \tag{3.27}$$

である．右辺を原点における**複素真空**と呼んで，ϖ_0 と書く．

積公式 (3.24)より，当然

$$\bar{z} * \lim_{t\to\infty} e_*^{-tz*\bar{z}} = \bar{z} * \varpi_0 = 0 \tag{3.28}$$

である．

$z = u + iv$ は多様な側面を持っており，u,v に関する正規順序表示では(二

種類の)絶対可逆元と思うことができたし，エルミート型の積公式で計算するときには(これは u,v に関するワイル順序表示と言って良いが)，右左の半逆元 $\bar{z}_0^{\circ}$, $z_0^{\bullet}$ を持っている．これらのどの二つも，結合律をみたす代数の中には同居できないのである．

$e_*^{-\frac{1}{2}z\cdot\bar{z}}$ の特徴は u,v が $\mathbb{R}$ に制限されているとき，つまり $z=u+iv$ が $\mathbb{C}$ に制限されているときには $\mathbb{R}^2$ 上の急減少関数となるということである[注9]が，上で述べたことは u,v を $\mathbb{R}$ に制限しないで成立するのである．

3.2　∗-指数関数の正規順序表示と極地元

モイヤル積公式による計算では ∗-指数関数に特異点が出てきたのであるが，これは元の表示方法が悪いために起こる特異点と考えられるから，∗-指数関数を ΨDO-積公式で計算してみよう．

3.2.1　正規順序表示

この場合はまず普通の可換積を ∘ で表すことにする．指数関数 $e_*^{tu*v} = e^{-\frac{\hbar i}{2}t}e_*^{tuv}$ をきめる微分方程式は $\frac{d}{dt}f_t(u,v)=(u*v)*f_t(u,v)$ で与えられるから，これは正規順序表示では

$$\frac{d}{dt}f_t(u,v)=u{\circ}v{\circ}f_t(u,v)+\hbar iu{\circ}\partial_u f_t(u,v)$$

のようになり，これは任意の f_0 について解くことができる．初期関数 $f_0(u,v)$ の解は

$$f_t(u,v)=e_*^{t(u*v)}*f_0(u,v)=f_0(e^{\hbar it}u,v){\circ}e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar i}(e^{\hbar it}-1)u\circ v}$$

で与えられる．同様の公式で $f_0(u,v)*e_*^{t(u*v)}$ も計算できる．つまり，正規順序表示では次のように積が計算できてしまう：

$$\begin{aligned} e_*^{t(u*v)}*f_0(u,v) &= e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar i}(e^{\hbar it}-1)u\circ v}{\circ}f_0(e^{\hbar it}u,v), \\ f_0(u,v)*e_*^{t(u*v)} &= f_0(u,e^{\hbar it}v){\circ}e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar i}(e^{\hbar it}-1)u\circ v}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

注9　このことは6章で使う．

特に，次も分かる(左辺の ± に関係なく右辺がきまる)：

$$e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}u*v}*f_0(u,v)=f_0(-u,v)\circ e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v},\quad f_0(u,v)*e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}u*v}=f_0(u,-v)\circ e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}.$$

上の式をワイル順序表示のものと比較してみよう：

$$e_*^{t(u*v)}=e_*^{t(uv-\frac{\hbar i}{2})}=\frac{e^{-\frac{\hbar ti}{2}}}{\cos\frac{\hbar t}{2}}e^{\frac{2}{\hbar}uv\tan\frac{\hbar t}{2}}.$$

これは $t=\frac{\pi}{\hbar}\times$ (奇数) では定義できていなかったが，$e_*^{2\pi(u*v)}=1$ である．ΨDO-積公式の下では $e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{\hbar it}-1)u\circ v}$ は $t=\frac{\pi}{\hbar}\times$ (奇数) でも定義でき，$e_\circ^{\frac{2}{\hbar i}u\circ v}$ のように与えられる．

式 (3.29)により

$$e_*^{ituv}=e^{-\frac{\hbar t}{2}}e_*^{it(u*v)}=e^{-\frac{\hbar t}{2}}e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{-\hbar t}-1)u\circ v},\quad e_*^{itv*u}=e^{-\frac{\hbar t}{2}}e_*^{ituv}$$

が分かるから，真空及び uv, $v*u$ の逆元の正規順序表示も得られる：

$$\begin{gathered}\varpi_{00}=\lim_{t\to\infty}e_*^{itu*v}=e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v},\\ (uv)_*^{-1}=-i\int_0^\infty e_*^{\frac{it}{\hbar}uv}dt,\quad (v*u)_*^{-1}=-i\int_0^\infty e_*^{\frac{it}{\hbar}v*u}dt.\end{gathered}\tag{3.30}$$

しかし，$(u*v)_*^{-1}$ は正規順序表示では発散する．

演習問題 5 上で正規順序表示されたものに相互変換 $I_\circ$ を施してみよ．

次の公式も得られる：

$$e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}(u\circ v)}*e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}=e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2(i-c)u\circ v)}.\tag{3.31}$$

これより複合同順で

$$e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}uv}*\varpi_{00}=\pm ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}*e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}=\pm i\varpi_{00}\tag{3.32}$$

も分かる．この式はワイル順序表示では計算できなかった式である．

上の計算を踏まえて，今度は一般の 2 次の指数関数を正規順序表示で計算してみよう．$au^2+bv^2+2cu*v=au^2+bv^2+2cu\circ v$ であり，これより

$e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)} = e_*^{t(au^2+bv^2+2cu\circ v)}$ であるから，$e_*^{t(au^2+bv^2+2cu\circ v)}$ が定義できればよい．

ΨDO-積公式で計算すれば

$$\frac{1}{\hbar}(au^2+2cu\circ v+bv^2)*f_t$$
$$=\frac{1}{\hbar}(au^2+2cu\circ v+bv^2)\circ f_t+2i(cu+bv)\circ\partial_u f_t-\hbar b\partial_u^2 f_t$$

である．偏微分方程式の形まではすぐ分かるが解の形を一般的に与えるのは難しい．そこで実解析的解の一意性を使って $f_t(u,v)=e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}$ を

$$f_t(u,v)=\psi(t)e_\circ^{\phi_1(t)u^2+\phi_2(t)v^2+2\phi_3(t)u\circ v}$$

のように形を限定して解くことを考える．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)*f_t\\
&=\Big(\big(\frac{1}{\hbar}a+4ic\phi_1(t)-4\hbar b\phi_1(t)^2\big)u^2\\
&\quad+\big(\frac{1}{\hbar}c+2ic\phi_3(t)+2ib\phi_1(t)-4\hbar b\phi_1(t)\phi_3(t)\big)2u\circ v\\
&\quad\quad+\big(\frac{1}{\hbar}b+4ib\phi_3(t)-4\hbar b\phi_3(t)^2\big)v^2\\
&\quad\quad\quad-2\hbar b\phi_1(t)\Big)\circ\psi(t)e_\circ^{\phi_1(t)u^2+\phi_2(t)v^2+2\phi_3(t)uv}
\end{aligned}$$

であり，

$$\frac{d}{dt}f_t=\Big(\psi'(t)\psi^{-1}(t)+\phi_1'(t)u^2+\phi_2'(t)v^2+2\phi_3'(t)uv\Big)\circ f_t$$

である．これより次の常微分方程式系の解を求めればよい：

$$\begin{cases}
\phi_1'(t)=\frac{1}{\hbar}a+4ic\phi_1(t)-4\hbar b\phi_1(t)^2\\
\phi_2'(t)=\frac{1}{\hbar}b+4ib\phi_3(t)-4\hbar b\phi_3(t)^2=-4b\hbar(\phi_3+\frac{1}{2\hbar i})^2\\
\phi_3'(t)=\frac{1}{\hbar}c+2ic\phi_3(t)+2ib\phi_1(t)-4\hbar b\phi_1(t)\phi_3(t)\\
\qquad\qquad=-4\hbar b(\phi_1-\frac{ci}{2\hbar b})(\phi_3+\frac{1}{2\hbar i})\\
\psi'(t)=-2\hbar b\phi_1(t)\psi(t).
\end{cases}\tag{3.33}$$

初期条件は $\phi_i(0)=0$, $\psi(0)=1$ である．解がきれいに求まる場合から考え

ていく：

$b=0$ の場合：

この場合 (3.33)は容易に解けて

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+2cu\circ v)} = e_\circ^{\frac{a}{4ci\hbar}(e^{4cit}-1)u^2+\frac{1}{2i\hbar}(e^{2cit}-1)2u\circ v} \tag{3.34}$$

が分かる．$t\in\mathbb{C}$ のどこにも特異点は現れない．モイヤル積の計算で発散するのは $e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+2u*v)}$ であるが，これは

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+2u*v)} = e_\circ^{-\frac{1}{\hbar i}2u\circ v} = e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v} \tag{3.35}$$

である．意外なことに，$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+2u\circ v)}$ は a **に全く依存**しないのである．

ついでに

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v} = e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}u*v}, \quad e_*^{\frac{\pi}{\hbar}v*u} = e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}v*u} \tag{3.36}$$

も分かる．これは $\sin_* \frac{\pi}{\hbar i}u*v = \sin_* \frac{\pi}{\hbar i}v*u = 0$ と書いてもよいであろう．

これと指数法則より $e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv} = -e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ も分かる．間違いやすい元であるから，次のことに注意しておこう：

命題 3.1　$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+2u*v)}$ は t について周期 π であるが，$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+2uv)}$ は t について周期 2π である．

指数法則は成立するが，これは次の直接計算でも確かめられる：

$$\begin{aligned}
&e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{is}-1)u\circ v} * e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{it}-1)u\circ v}\\
&\quad= \sum e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{is}-1)u\circ v}\frac{(\hbar i)^k}{k!}(\frac{i}{\hbar}(e^{is}-1)u)^k(\frac{i}{\hbar}(e^{it}-1)v)^k e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{it}-1)u\circ v}\\
&\quad= e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{is}-1)u\circ v} e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{is}-1)(e^{it}-1)u\circ v} e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{it}-1)u\circ v}\\
&\quad= e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(e^{i(s+t)}-1)u\circ v}.
\end{aligned}$$

$\sigma=e^{is}-1$, $\tau=e^{it}-1$ と置き指数法則を書き直すと，次の積公式となる：

$$e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}\sigma u\circ v} * e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}\tau u\circ v} = e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(\sigma\tau+\sigma+\tau)u\circ v}. \tag{3.37}$$

積に特異点はないが，逆元を考えると

$$(e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}\sigma u\circ v})_*^{-1} = e_\circ^{-\frac{1}{\hbar i}\frac{\sigma}{1+\sigma}u\circ v} \tag{3.38}$$

となり，$\sigma = -1$ で発散する．

これは困ったことのように見えるかも知れないが，実は $e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v} = \varpi_{00}$（真空）なので，真空に逆元があってはかえって困るのである．

演習問題 6 $\lim_{t\to\infty} e_*^{itu*v} = \varpi_{00}$ を用いて上の式を確かめよ．さらに，$c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ のとき $t \in \mathbb{R}$ として

$$\lim_{t\to\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}u*(au+2c*v)} = \lim_{t\to\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}(au^2+2cu\circ v)} = e_\circ^{\frac{ai}{4c\hbar}u^2+\frac{i}{\hbar}u\circ v}$$

を示せ．これも真空と呼ぶべき元である．

演習問題 7 式(3.37)を参照して，s, t, $st \neq -1$ に対し，$\circ$-積を $s\circ t = s + t + st$ と定義する．次の式が成立することを確かめよ：

(a) $r\circ(s\circ t) = (r\circ s)\circ t$, $0\circ t = t$, $s\circ t = t\circ s$.

(b) $s \neq -1$ ならば $s\circ(-s/(1+s)) = 0$.

(c) $s+1, t+1 \geq 0$ ならば $s\circ t + 1 \geq 0$.

$a = 0$ の場合：

式 (3.33)で $a = 0$ の場合は初期条件が $(0,0,0,1)$ の解では $\phi_1(t) = 0$ であり，従って，$\psi(t) = 1$ である．(3.33)の第三の式は

$$\phi_3'(t) = \frac{1}{\hbar}c + 2ic\phi_3(t)$$

となるから解は $\phi_3(t) = \frac{1}{2\hbar i}(e^{2cit} - 1)$ で与えられる．

(3.33)の第二式から

$$\phi_2'(t) = \frac{b}{\hbar}e^{4cit}$$

が得られ，これより $\phi_2(t) = \frac{b}{4ci\hbar}(e^{4cit} - 1)$. 結果として

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(bv^2+2cu\circ v)} = e_\circ^{\frac{b}{4ci\hbar}(e^{4cit}-1)v^2+\frac{1}{2\hbar i}(e^{2cit}-1)2u\circ v} \tag{3.39}$$

が得られる．式(3.5)と同じ指数法則が成立する．

特に

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(bv^2+2u*v)} = e_\circ^{-\frac{2}{\hbar i}u\circ v} = e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v} \tag{3.40}$$

となり，これも b に**全く依存しない**のである．

周期性に関しては命題3.1 同様のことが成立しているが，この周期の違いはかなり奇妙な結果を生み出す．式 (3.35), (3.40)を見れば次のことが分かる：

補題 3.6 量子正準共役対 (u,v) に関する正規順序表示では $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*(v+au)}$, $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}$, $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(u+bv)*v}$ は $a,b\in\mathbb{C}$ に関係なく，すべて同じ元 $e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ として表示される：

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*(v+au)}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(u+bv)*v}=e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}.$$

ワイル順序表示では表示されなかった $e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$, $c^2-ab=1$ は動けるとしても $c^2-ab=1$ の束縛下では自由度は高々2 だが，上のことからその二つの自由度が消されているので，**実は唯一点からなる集合**であることが予想されるであろう．

こうなってくると，微分方程式系(3.33)をがんばって解いてみたくなるわけだが，答は $D=c^2-ab$ として

$$\begin{cases}\phi_1(t)=\dfrac{a}{2\hbar}\dfrac{\sin(2\sqrt{D}\,t)}{\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t)-ic\sin(2\sqrt{D}\,t)}\\[2ex] \phi_2(t)=\dfrac{b}{2\hbar}\dfrac{\sin(2\sqrt{D}\,t)}{\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t)-ic\sin(2\sqrt{D}\,t)}\\[2ex] \phi_3(t)=\dfrac{i}{2\hbar}\Big(1-\dfrac{\sqrt{D}}{\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t)-ic\sin(2\sqrt{D}\,t)}\Big)\\[2ex] \psi(t)=\dfrac{D^{1/4}e^{-c\hbar it}}{\big(\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t)-ic\sin(2\sqrt{D}\,t)\big)^{1/2}}\end{cases}\tag{3.41}$$

となることが分かる．

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cu\circ v)}=\psi(t)\exp(\phi_1(t)u^2+\phi_2(t)v^2+2\phi_3(t)u\circ v)$$

とおいていたからこれで解が書けたような気になるかもしれないが，$\sqrt{D}$ の不定性は影響無いが，$\psi(t)$ を求める式の $\sqrt{\ }$ の不定性は消すことはできないことが次節で分かるのである．一方，ワイル順序表示ではこれは不定性がなく求められていたので，このことは一見矛盾にみえるが，実はこれはワイル順序表示と正規順序表示の間の相互変換が 2 次式の指数関数のところで不定性を持つことを意味する．

3.2.2　極地元

3.2.1 節の最後に述べた予想を確認しよう．そのためにはまず一般の場合を見るのだが，注目しているのは $t = \frac{\pi}{2}$, $c^2 - ab = 1$ の場合である．さらに $c = 0, ab = -1$ で $t \to \pm i\infty$ の場合も計算しておこう．

以下では $c^2 - ab = 1$ の場合を主に考える．(3.33)の第一の方程式は

$$\Big(\phi_1(t) - \frac{ci}{2\hbar b}\Big)' = -\frac{1}{\hbar b}(c^2 - ab) - 4\hbar b\Big(\phi_1(t) - \frac{ci}{2\hbar b}\Big)^2 \tag{3.42}$$

であり，これより $c^2 - ab = 1$ の場合には

$$\phi_1(t) = \tfrac{ic}{2\hbar b} - \tfrac{1}{2\hbar b}(\tan 2(t + t_0)).$$

但し t_0 は初期条件 $\phi_1(0) = 0$ より決定する，つまり $\tan 2t_0 = ic$ であるが，これは $c = \pm 1$ 以外は必ず求められる．これで分かるように特異点を持っている．また今の場合，$c^2 - ab = 1$, $ab \neq 0$ としているので，$c = \pm 1$ となることはない．

しかし，$t = \frac{\pi}{2}$ のときには $\tan 2(\frac{\pi}{2} + t_0) = \tan 2t_0$ であるから，$\phi_1(\frac{\pi}{2}) = 0$ である．

$c = 0, ab = -1$ で $t \to i\infty$ のときには正接 tan の加法公式を使って，

$$\lim_{t\to\pm\infty} \phi_1(it) = \pm\frac{i}{2\hbar}a \tag{3.43}$$

となる．

四番目の式から

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = ((\tan 2(t + t_0)) - ic)\psi(t).$$

これを初期条件 $\psi(0) = 1$ で解くと，$\tan 2t_0 = ic$ を使って

$$\psi(t) = e^{-ict}\Big(\frac{\cos(2t_0)}{\cos 2(t + t_0)}\Big)^{\frac{1}{2}} = e^{-ict}(\cos 2t - ci\sin 2t)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.44}$$

と求まる．見て分かるように，a, b には無関係に $\cot 2t = ic$ なる t の所 $t = \frac{\pi}{2} - t_0$ に特異点がある．

上の計算より，$c = 0$, $ab = -1$ のときには

$$\lim_{t\to\pm\infty} \psi(it) = \lim_{t\to\pm\infty} (\cosh 2t)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

となるが，$e^{\pm t}$ をかけて少し補正すると複合同順で

$$\lim_{t\to\pm\infty}\psi(it)e^{\pm t}=\sqrt{2},\quad \lim_{t\to\pm\infty}\psi(it)e^{\mp t}=0 \tag{3.45}$$

となる．

(3.44)式の平方根の所で ± の不定性を処理する方法を考えよう．$c^2-ab=1$, $ab\neq 0$ だから c は $\mathbb{C}-\{\pm 1\}$ を動く．また $ab=0$ の場合は前節，前前節の計算で $\psi(t)=1$ であったから，その場合にうまくつながるようにしなければならない．

奇妙な事柄 4

ところが，次のようになる：

補題 3.7 $c^2-ab=1$ をみたすすべての $a,b,c\in\mathbb{C}$ に渡って連続となるように上の平方根の所の不定性を処理することはできない．

証明 式 (3.44)で $c\to\pm 1$ とすると $(e^{2it})^{\frac{1}{2}}=e^{it}$ と普通に処理すれば $\psi(t)=1$ となる．しかし，式 (3.44)で $t=\frac{\pi m}{2}$ とすると，

$$\psi(\frac{\pi m}{2})=e^{-\frac{\pi mic}{2}}\sqrt{(-1)^m}$$

となる．要するに，

$$\psi(\frac{\pi}{2})=\sqrt{-1}\,e^{-\frac{\pi ic}{2}}$$

ではあるが，$\sqrt{-1}$ の ± の不定性は $\lim_{c\to\pm 1}\sqrt{-1}\,e^{-\frac{\pi ic}{2}}=1$ となるように取らないといけないわけである．

これは不可能である．なぜなら $ie^{\pm\frac{\pi i}{2}}=\mp 1$ だから $\sqrt{-1}=i$ としても，$-i$ としても上の条件は満たされないのである． □

補題 3.7 は，$\pm\sqrt{\cdot}$ の不定性は部分的には処理できても，全体に渡って処理することは出来ないことを意味する．

(3.33)の第三の式は

$$\Big(\phi_3(t)+\frac{1}{2\hbar i}\Big)'=2(\tan 2(t+t_0))\Big(\phi_3(t)+\frac{1}{2\hbar i}\Big)$$

であり，これより $\phi_3(t)+\frac{1}{2\hbar i}=\frac{A}{\cos 2(t+t_0)}$ であるが，A は初期条件 $\phi_3(0)=0$

で決めるので，$A=\frac{1}{2\hbar i}\cos 2t_0$ であり，従って

$$\phi_3(t)+\tfrac{1}{2\hbar i}=\frac{1}{2\hbar i}\frac{\cos 2t_0}{\cos 2(t+t_0)}=\tfrac{1}{2\hbar i}(\cos 2t-ci\sin 2t)^{-1}$$

である．従って，$\phi_3(\frac{\pi}{2})=\frac{i}{\hbar}$ である．

また，$c=0, ab=-1$ の時には

$$\lim_{t\to\pm\infty}\phi_3(it)=-\tfrac{1}{2\hbar i}+\lim_{t\to\infty}\tfrac{1}{2\hbar i}(\cosh 2t)^{-1}=-\tfrac{1}{2\hbar i} \tag{3.46}$$

である．

(3.33)の第二の式は

$$\phi_2'(t)=-4\hbar b\Big(\phi_3(t)+\frac{1}{2\hbar i}\Big)^2=-4\hbar bA^2\Big(\cos 2(t+t_0)\Big)^{-2}.$$

よって

$$\phi_2(t)=-2\hbar bA^2\left(\tan 2(t+t_0)-\frac{ic}{\sqrt{c^2-ab}}\right).$$

やはり $\phi_2(\frac{\pi}{2})=0$ となる．

$c=0, ab=-1$ の時には

$$\lim_{t\to\pm\infty}\phi_2(it)=\pm\frac{i}{2\hbar}b \tag{3.47}$$

となる．

$t=\frac{\pi}{2\hbar}$ の場合で，総合すると，$ab\neq 0$ でも $=0$ でも $c^2-ab=1$ なら

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}=\pm ie^{-\frac{\pi ic}{2}}e^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$$

と書いて良い．したがって，$2u\circ v=u*v+v*u-\hbar i$ を使って

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+c(u*v+v*u))}=\pm ie^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v} \tag{3.48}$$

となる．この式だけなら $\pm$ のどちらかを選んでしまえば良さそうに見えるが，右辺の $\pm$ は $e_*^{\frac{t}{2\hbar}(au^2+bv^2+c(u*v+v*u))}$ が $[0,\pi]\times\{(a,b,c);c^2-ab=1\}$ 全体で連続となるようには決められない．

例えば(3.48)式で $+$ を選んだとすると，$c=-1$ の所で

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(-(u*v+v*u))}=-ie^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$$

となってしまう．以上のことから次の補題が得られる：

補題 3.8 ∗-指数関数 $e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+c(u*v+v*u))}$ は (u,v) に関する正規順序表示では，$c^2-ab=1$ の時には恒等的に $\pm ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ で与えられる．$\pm$ は全体に渡って連続にきめることはできない．しかし，

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)} = ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}, \quad e_*^{-\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)} = -ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$$

のようにきめておくのは指数法則だけから見れば自然である．$u*v+v*u=2uv$ だから $e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+c(u*v+v*u)}$ は $e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ のように書いても良い．

正準共役対 $u'=\alpha u+\beta v$, $v'=\gamma u+\delta v$ に関する正規順序表示で

$$\varepsilon_{00}=\{e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)}; \alpha\delta-\beta\gamma=1\}$$

のように書かれる元を**極地元**と呼んでいた．前の奇妙な事柄 4 に関係していることだが，定義だけ見ると極地元の全体は 2 次元の多様体をなすように見えるし，補題 3.8 を考えても 2 点からなる集合のように思えるわけだが，補題 3.8 を使うと見かけとは違って，次のような結論となる：

奇妙な事柄 5

定理 3.2 極地元は唯一点よりなる集合と考えなければならない．

証明　補題 3.8 では符号の選びかたにやや曖昧さが残ったが，$c^2-ab=1$ で，c が十分 1 に近い場合には u,v に関する正規順序表示で恒等的に一点 $ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ として良い．ところが，$c^2-ab=1$ だと $au^2+bv^2+c(u*v+v*u)=au^2+bv^2+2cuv$ は

$$au^2+bv^2+2cuv=2(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v), \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

となるように因数分解される．すると $u'=\alpha u+\beta v$, $v'=\gamma u+\delta v$ は量子正準共役対だから，

$$au^2+bv^2+2cuv=2u'v'=u'*v'+v'*u'$$

に注意すると，$c'^2-a'b'=1$ で c' が十分 1 に近い所では恒等的に

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}\left(a'u'^2+b'v'^2+c'(u'*v'+v'*u')\right)} = ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u'\circ' v'}$$

のように書かれるが，一点であることに変わりはない．$\circ'$ は u',v' に関する正規順序表示の時の可換積を表す．

一方 $c^2-ab=1$ という集合は $\mathbb{C}^3$ の中の連結な部分多様体である．この部分多様

体の各点で上の議論を繰り返せば，極地元は唯一点よりなる集合と考えなければならないのである． □

補題 3.9 極地元 ε_{00} は $\varepsilon_{00} * \varepsilon_{00} = -1$ なる性質を持っていて，座標関数 u, v と反交換する：

$$u * \varepsilon_{00} + \varepsilon_{00} * u = 0, \qquad v * \varepsilon_{00} + \varepsilon_{00} * v = 0$$

である．

証明　第一の式は定義と指数法則より明らかである．第二の式は球撞き補題により

$$v * e_*^{tu*v} = e_*^{tv*u} * v = e^{i\hbar t} e_*^{tu*v} * v$$

だから，$t = \frac{\pi}{\hbar}$ とし，$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v} = i\varepsilon_{00}$ に注意すれば良い． □

従って次が分かる：

補題 3.10 ε_{00} は任意の偶元（ $f(-u,-v) = f(u,v)$ をみたす元）と可換である．特に任意の $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ とも可換である．

つまり，u, v で張られる線型空間への随伴表現では $\mathrm{Ad}(\varepsilon_{00}) = -I$ で，$\mathrm{Ad}(\varepsilon_{00}^2) = I$ だが，$\varepsilon_{00}^2 = -1$ なのである．

さらに，極地元 ε_{00} は $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ や $e_*^{\frac{\pi i}{2\hbar}(u^2+v^2)}$ とも見ることができるわけだから，複素共役元 $\overline{\varepsilon_{00}}$ といったものは定義できない．

複素真空の正規順序表示

この節では最初の目的からはずれて $\lim_{t\to\infty}$ も計算してきたが，ここではそれを使って，$\lim_{t\to\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}i(u^2+v^2-\hbar)}$ を正規順序表示で書いてみよう．指数法則から $e_*^{\frac{it}{\hbar}i(u^2+v^2-\hbar)} = e^t e_*^{\frac{it}{\hbar}(iu^2+iv^2)}$ だから，式(3.43), (3.45), (3.46), (3.47) より，複号同順で公式

$$\lim_{t\to\pm\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}i(u^2+v^2\mp\hbar)} = \sqrt{2}e_\circ^{\mp\frac{1}{2\hbar}(u^2+v^2\mp 2iu\circ v)} \tag{3.49}$$

が得られる．左辺の $\lim_{t\to\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}i(u^2+v^2-\hbar)}$ は複素真空 ϖ_0 であってワイル順序表示でも書くことのできる元である．(3.49)式は複素真空の（(u,v) に関する）正規順序表示なのである．

3.2.3 判別式が零の場合の指数関数

$c^2-ab=0$ の場合の指数関数はワイル順序表示では定理 3.1 で分かるように簡単なものであったが，正規順序表示ではどうなるであろうか？ これは式(3.33)の $c^2-ab=0$ の場合である．

(3.33)の第一式は (3.42)を使って

$$\big(\phi_1(t)-\frac{ci}{2\hbar b}\big)'=-4\hbar b\big(\phi_1(t)-\frac{ci}{2\hbar b}\big)^2$$

となるから，$\phi_1(0)=0$ の初期条件で

$$\phi_1(t)=\frac{ci}{2\hbar b}(1+\frac{1}{2cit-1})=\frac{a}{\hbar}\frac{t}{1-2cit}$$

となり，これを使って (3.33)の第 4 式より

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{1-2cit}}e^{-cit}$$

となる．さらに，計算を進めると，

$$\phi_3(t)=\frac{i}{2\hbar}(1+\frac{1}{2cit-1})=\frac{c}{\hbar}\frac{t}{1-2cit},$$
$$\phi_2(t)=\frac{bi}{2c\hbar}(1+\frac{1}{2cit-1})=\frac{b}{\hbar}\frac{t}{1-2cit}$$

が分かる．全部合わせて次の公式となる：$c^2-ab=0$ のとき

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu*v)}=\frac{1}{\sqrt{1-2cit}}e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(\frac{t}{1-2cit})(au^2+bv^2+2cu\circ v)}. \tag{3.50}$$

見て分かるように(3.50)は特異点を持っている．つまり，$ab-c^2=0, ab\neq 0$ の場合 $e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は ΨDO-積公式では $1-2cit=0$ に特異点を持っている．特に $e_*^{\frac{1}{2\hbar}(u-iv)^2}$, $e_*^{-\frac{1}{2\hbar}(u+iv)^2}$ は発散する．

これらは，モイヤル積公式では $e_\cdot^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ のように特異点を含まないように計算される．ΨDO-積公式もモイヤル積公式も一長一短であり，**どちらか一方で話が済む訳ではない．**

上の計算結果を使うと (2.6)で与えた公式(の一部)

$$\delta_*((-i)(u+iv))=\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{t(u+iv)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\hbar t^2}e_\circ^{it(-i)(u+iv)}dt=\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar}}e_\circ^{\frac{1}{2\hbar}(u+iv)^2}$$

の右辺も2次の指数関数で求められそうに見える．しかし実際には，

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar}}e_\circ{}^{-\frac{1}{2\hbar}(u+iv)^2} = C\frac{1}{\sqrt{1-2cit}}e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(\frac{t}{1-2cit})(au^2+bv^2+2cu\circ v)} \tag{3.51}$$

となるような a,b,c,t は求まらない．

3.2.4　真空と多項式のからんだ元の結合律

e_*^{isuv} の具体的な表示が得られ $\hbar$ について0まで定義できることが分かったので，第一結合律定理より多項式と $e_*^{is_1uv},\cdots,e_*^{is_muv}$ がからんだ元での結合律は確立しているのだが，真空 ϖ_{00} がからんだ積の結合律は別枠で示さないといけない．

まず二つの多項式と $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元の結合律から次が分かる：

補題 3.11 $*$-積で書かれた任意の多項式 $P_*(u,v)$, $Q_*(u,v)$ に対して

$$\begin{aligned}(P_*(u,v)*\varpi_{00})*Q_*(u,v) =&P_*(u,v)*(\varpi_{00}*Q_*(u,v))\\ =(P_*(u,0)*\varpi_{00})*Q_*(0,v) =&P_*(u,0)*(\varpi_{00}*Q_*(0,v))\end{aligned}$$

が成立する．

さらに ϖ_{00} はワイル順序表示でも，正規順序表示でも書かれているから，ΨDO-積公式を使って計算すると次が分かる：

補題 3.12 任意の $f_\circ(u,v)\in Hol(\mathbb{C}^2)$ に対して

$$\varpi_{00}*f_\circ(u,v)=\varpi_{00}\circ f_\circ(0,v),\quad f_\circ(u,v)*\varpi_{00}=f_\circ(u,0)\circ\varpi_{00}.$$

$$(\varpi_{00}*f_\circ)*\varpi_{00}=\varpi_{00}*(f_\circ*\varpi_{00})=f_\circ(0,0)\varpi_{00}.$$

$$f_\circ(u,v)*(\varpi_{00}*g_\circ(u,v))=f_\circ(u,0)\circ\varpi_{00}\circ g_\circ(0,v)=(f_\circ(u,v)*\varpi_{00})*g_\circ(u,v)$$

証明　$\varpi_{00}=e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ だったから ΨDO-積公式を使うと

$$e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}*f_\circ(u,v)=e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}\circ\sum\nolimits_k\frac{1}{k!}(-u\partial_u)^kf(u,v)=e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}\circ f(0,v)$$

となる．他も同様の計算である．　□

真空 ϖ_{00} は $\hbar$ の冪級数の形に書かれる元ではないが，これで分かるように ΨDO-積公式を使った計算では真空との積で発散は生じない．ϖ_{00} は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元であり，$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元どうしの積は一般には定義できないのだが真空がからむときには ΨDO-積公式を使って実際に計算してみることにより結果的に結合律が示せるのである．

任意の $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ $(p<2)$ の元 $P(u,v)$, $Q(u,v)$, $R(u,v)$, $S(u,v)$ に対して次のような結合律が成立していることが解る：

$$
\begin{aligned}
&(P(u,v)*\varpi_{00}*Q(u,v))*(R(u,v)*\varpi_{00}*S(u,v))\\
&\qquad=(P(u,v)*\varpi_{00}*Q(u,v)*R(u,v))*(\varpi_{00}*S(u,v))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(P(u,v)*\varpi_{00})*(Q(u,v)*\varpi_{00}*S(u,v))&\\
=&P(u,v)*(\varpi_{00}*(Q(u,v)*\varpi_{00}*S(u,v)))\\
=&P(u,v)*(\varpi_{00}*Q(u,v)*\varpi_{00})*S(u,v).
\end{aligned}
$$

このような結合律ができたので，次のことは明らかであろう：

演習問題 8 $E_{p,q}=\frac{1}{\sqrt{p!q!(\hbar i)^p(\hbar i)^q}}u^p*\varpi_{00}*v^q$ は行列要素であることを示せ．$E_{p,q}\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ である．

$E_{p,q}\in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ であり，これらの間に結合律が示せたから，$\sum_{finite}$ を任意有限和の記号として，

$$\mathfrak{M}(\infty)=\{\sum\nolimits_{finite}a_{p,q}E_{p,q};a_{p,q}\in\mathbb{C}\}$$

と置く．これは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれる大きな結合代数になっていることが分かる．

形式的に無限和まで考えると，$\sum_k E_{k,k}$ は単位元で 1 と同じだから，次が得られる：

$$
\begin{aligned}
u&=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!(\hbar i)^k}u^{k+1}*\varpi_{00}*v^k=\sum_{k\geq 0}\sqrt{\hbar i(k+1)}E_{k+1,k}\\
v&=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!(\hbar i)^k}u^k*\varpi_{00}*v^{k+1}=\sum_{k\geq 0}\sqrt{\hbar i(k+1)}E_{k,k+1}.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

これよりもとのワイル代数の生成元も復活し，

$$\frac{1}{\hbar i}u*v=\sum_{k=0}^{\infty}kE_{k,k},\quad \frac{1}{\hbar i}v*u=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)E_{k,k} \tag{3.53}$$

となっている．

$\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれ，しかも u,v を含むかなり大きな結合代数になっていたが，実は次が成立する．

命題 3.2 $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)\cap\mathfrak{M}(\infty)=\{0\}$ である．

証明　$f(u,v)\in\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ が $\sum_{finite}b_{p,q}u^p*\varpi_{00}*v^q$ のように有限和で書かれたとして，$b_{p,q}$ が 0 でない最大の p の所を考えておいて，v^p を左から $*$ 積すれば，$f(u,v)\in\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ で $\sum_{finite}b_q\varpi_{00}*v^q$ のように書かれる元が見つかる．

そこで，b_q が 0 でない最大の q の所を考えておいて，u^q を右から $*$ 積する議論を繰り返せば，結局 $\varpi_{00}\in\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ となって矛盾となる．この議論には $\mathfrak{M}(\infty)$ の元は有限和で書かれていることが効いている．　□

$\mathfrak{M}(\infty)$ が自然に働く線型空間は $\frac{1}{\sqrt{p!(\hbar i)^p}}u^p*\varpi_{00}$, $p=0,1,2,\ldots$ で張られる空間であるが，ここには自然に u,v も働くので，u,v も $\infty\times\infty$ 行列で表示される．これらの行列は $\mathfrak{M}(\infty)$ には入っていないが，第1章の演習問題 14 にあるような行列になっている．

つまり，位相を無視して，$\infty\times\infty$ 行列で考えれば，ワイル代数も，$\mathfrak{M}(\infty)$ も，テープリッツ代数もみな同じ所に入っているのである．

注意　共役真空 $\bar{\varpi}_{00}$ はワイル順序表示では $2e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ だったが，(u,v) に関する正規順序表示で $\bar{\varpi}_{00}$ を表示することはできない．正規順序表示で $\varpi_{00}=e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ であるが $\bar{\varpi}_{00}\neq e_{\circ}^{-\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ である．

一方 (u,v) に関する反正規順序表示では $\bar{\varpi}_{00}=e_{\bullet}^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}$ である．

第4章
逆元の解析接続と2次形式の離散描像

この章では判別式が零でない2次形式は離散描像を持つという，かなり奇妙な(しかし，量子論では必要な)事実を示す．これは，判別式が1の2次形式 Q を $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で考えると，$Q-\lambda$ は(逆元の作り方の指定によるが) λ が $\hbar i(\mathbb{N}+\frac{1}{2})$ に入っていないとき，または λ が $-\hbar i(\mathbb{N}+\frac{1}{2})$ に入っていないときには可逆となるという形で述べられる．これは $(Q-\lambda)^{-1}$ が

$$\mathbb{C}-\{\hbar i(\mathbb{N}+\frac{1}{2})\}, \quad \text{または} \quad \mathbb{C}-\{-\hbar i(\mathbb{N}+\frac{1}{2})\}$$

に解析接続できることで示されるのである．これは作用素表現を作って示されるのではなく代数の中だけで示される．しかも，この描像は u, v が実軸に制限されているときにも成立する．

これは奇妙に見えるかもしれないが，逆に佐藤超関数との間にきれいな関係がでてくるのである．我々はむしろ，こういうことが全て作用素表現を考える以前の素朴な微積分の代数の中に含まれていることに驚いているのである．

4.1 逆元，半逆元，真空

非可換の場合は半逆元が出て来るのは自然だが相異なる左右の逆元が出てきたり，逆元が二つ見つかったりするのは困った現象であろう．しかし，実際にこういうことが起こるので，このような場合どちらかを捨ててしまわな

いと結合律が保てなくなる．しかし，勝手に一方を捨てるだけで話が済むとは思えないので，捨てるなら捨てるで，その理由付けがほしいのである．

4.1.1 モイヤル積公式での二つの逆元

モイヤル積公式での計算から次のようなことが分かる：

定理 4.1 au^2+bv^2+2cuv の判別式 $D=c^2-ab$ が零でないならば，二次式 au^2+bv^2+2cuv は二つの逆元 $(au^2+bv^2+2cuv)_+^{-1}$ 及び $(au^2+bv^2+2cuv)_-^{-1}$ を持ち，これらは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれている．この二つの逆元は一致しない．

証明　$D\neq 0$ ならば $\sqrt{-D}=re^{i\theta}, r>0$ と置き，(3.3)を使って

$$-e^{-i\theta}\int_0^\infty e_*^{ite^{-i\theta}(au^2+bv^2+2cuv)}dt,\quad e^{-i\theta}\int_{-\infty}^0 e_*^{ite^{-i\theta}(au^2+bv^2+2cuv)}dt,$$

を考える．積分の収束を見るには，被積分関数がワイル順序表示で書いたとき，$t\to\pm\infty$ で指数関数の速さで減衰していることに注意すれば良い．これらはワイル順序表示で $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれていることが容易に分かる．

$X=au^2+bv^2+2cuv$ としておくと，

$$\begin{aligned}\mp X*e^{-i\theta}\int_0^\infty e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}dt &= -e^{-i\theta}\int_0^\infty \frac{d}{dt}e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}dt\\ &= 1-\lim_{t\to\infty}e^{-i\theta}e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}=1\end{aligned}$$

$D\neq 0$ は $\lim_{t\to\infty}e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}=0$ の証明に使われる．収束は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の位相に関する収束である．

また，系 2.4 より $e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}*X=X*e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}$ だから，

$$\mp e^{-i\theta}\int_0^\infty e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}dt*X=-e^{-i\theta}\int_0^\infty \frac{d}{dt}e_*^{\pm e^{-i\theta}tX}dt=1$$

ともなる．

二つの逆元が一致しないのは

$$-\int_0^\infty e_*^{te^{-i\theta}X}dt-\int_0^\infty e_*^{-te^{-i\theta}X}dt=-\int_{-\infty}^\infty e_*^{te^{-i\theta}X}dt$$

で，この積分の実部が 0 でないことから分かる．　□

結合律の成立している所では逆元は唯一つの答だから，この現象は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ は $*$-積で閉じもしないし，積が定義できても結合律が成立しない場合がある

ことを述べているのである．uv のような元は普通の積で考えると $\frac{1}{uv}$ 等は作れない元だから，$*$-積というのは奇妙なものである．

$X = au^2 + bv^2 + 2cuv$ として

$$X_+^{-1} = -e^{-i\theta}\int_0^{\infty} e_*^{te^{-i\theta}X}dt, \quad X_-^{-1} = e^{-i\theta}\int_{-\infty}^{0} e_*^{te^{-i\theta}X}dt$$

とする．このように二つ書いたが，a, b, c を変化させたときこの区別に意味があるかどうか考えてみよう：

$$\mathfrak{D}_1 = \{au^2+bv^2+2cuv;\ c^2-ab=1\},\ \mathfrak{D}_* = \{au^2+bv^2+2cuv;\ c^2-ab\neq 0\}$$

とすると，$\mathfrak{D}_1$ 上では $X_\pm^{-1}$ はそれぞれ連続である．

しかし，$au^2+bv^2+2cuv, c^2-ab\neq 0$, を判別式が 1 の 2 次形式とスカラーの積に分解するしかたは $D = c^2 - ab$ として，

$$\sqrt{D}\cdot\frac{1}{\sqrt{D}}(au^2+bv^2+2cuv), \quad -\sqrt{D}\cdot\frac{-1}{\sqrt{D}}(au^2+bv^2+2cuv)$$

のように $\sqrt{D}$ の不定性が現れる．したがって $X_\pm^{-1}$ は $\mathfrak{D}_*$ の 2 重被覆空間（これは $\tilde{\mathbb{C}}_*$ を $\mathbb{C}_*$ の 2 重被覆空間として，$\tilde{\mathbb{C}}_* \times \mathfrak{D}_1$ である）を作り，そこからの写像と思うべきである．

ΨDO-積公式での逆元，半逆元

上の計算を ΨDO-積公式で行うとどうなるであろうか？ これを前節で計算できている例で調べよう．式 (3.34)及び(3.39)を見れば，$c = i$ のときには

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+2iuv)} = e^{-t}e_\circ^{-\frac{a}{4\hbar}(e^{-4t}-1)u^2+\frac{1}{2i\hbar}(e^{-2t}-1)2u\circ v} \tag{4.1}$$

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(bv^2+2iuv)} = e^{cit}e_\circ^{-\frac{b}{4\hbar}(e^{-4t}-1)v^2+\frac{1}{2\hbar i}(e^{-2t}-1)2u\circ v} \tag{4.2}$$

だから，

$$\int_0^{\infty} e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+2iuv)}dt, \quad \int_0^{\infty} e_*^{\frac{t}{\hbar}(bv^2+2iuv)}dt$$

は存在するが，$\int_{-\infty}^{\infty} dt$ の方は発散する．

補題 4.1 $(z+uv)_+^{-1}$ は $\mathrm{Im}\ z > -\frac{\hbar}{2}$ ならば存在し，$(v{*}u)_+^{-1}$ も存在する．これを使って $v^\circ = u*(v*u)_+^{-1}$ も正規順序表示で存在する．しかし，$(u{*}v)_-^{-1}$ や $v^\bullet$ は正規順序表示では発散してしまう．

これで分かるように正規順序表示はある種の対称性を犠牲にしているかわりに結合律はこわれにくくなっていると言えるのだが，補題 2.4 で見たように，正規順序表示においても結合律はこわれてしまう場合がある．

4.1.2　逆元の積公式

uv は可逆であった．しかも大部分のところで二つの逆元を持っていた．この逆元の違いは逆元を作るときの積分の方向の違いであった．場所ごとにどちらかの逆元を取ってしまうと，$uv-z$ は任意の z について可逆となるのである．

逆元同士の積公式を作るには 2 章で述べた，レゾルベント恒等式と呼ばれる部分分数分解を使う．((2.11)参照.)

命題 4.1 任意の α に対して $(x-\alpha)_+^{-1})^m$ 及び，$((x-\alpha)_-^{-1})^m$ は定義できる．しかし，$(x-\alpha)_+^{-1} * (x-\alpha)_-^{-1}$ は発散する．

逆元同士の $*$-積も公式(2.11)で定義する．だから例えば違う種類の逆元が使われていても

$$(x-\alpha)_+^{-1} * (x-\beta)_-^{-1} = \frac{1}{\beta-\alpha}\big((x-\alpha)_+^{-1} - (x-\beta)_-^{-1}\big)$$

のように定義するのである．

これは，ちょっと危険な定義である．$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して積分

$$\int_0^\infty e_*^{it(x-\alpha)}dt * \int_0^\infty e_*^{-is(x-\beta)}ds = \int_0^\infty e^{is(\beta-\alpha)}\int_{-s}^\infty e_*^{i\tau(x-\alpha)}d\tau ds$$

は普通の意味では一般には収束しない．にも拘らず $\alpha \neq \beta$ ならば

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\big((x-\alpha)_+^{-1} - (x-\beta)_-^{-1}\big)$$

が $(x-\alpha)*(x-\beta)$ の逆元になっていることは明らかである．

一方，$(v*u)_+^{-1} * (u*v)_-^{-1}$ は以下のように計算すると収束していることが分かる：

$$\begin{aligned}(v*u)_+^{-1}*(u*v)_-^{-1} &= \int_0^\infty\int_0^\infty e_*^{isv*u}*e_*^{-itu*v}dsdt\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\hbar}{2}(s+t)}e_*^{i(s-t)uv}dsdt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{\hbar}{2}p}\int_{-p}^{p}e_*^{iquv}dqdp\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{\hbar}{2}p}\int_{-p}^{p}\frac{1}{\cosh\frac{\hbar q}{2}}e^{\frac{2i}{\hbar}uv\tanh\frac{\hbar q}{2}}dqdp\end{aligned}$$

これが収束するのは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\frac{\hbar q}{2}}e^{\frac{2i}{\hbar}uv\tanh\frac{\hbar q}{2}}dq,\qquad \int_0^\infty e^{-\frac{\hbar}{2}p}dp$$

ともに収束することから明白であろう．収束する理由は $e^{-\frac{\hbar}{2}p}$ の項があるからである．計算を見れば

$$(v*u)_+^{-1}*(u*v)_-^{-1} = (u*v)_-^{-1}*(v*u)_+^{-1} \tag{4.3}$$

も分かる．

$$\begin{aligned}(v*u)_+^{-1}*\big(u*v*(u*v)_-^{-1}\big) &= (v*u)_+^{-1},\\ \big((v*u)_+^{-1}*u*v\big)*(u*v)_-^{-1} &= \big((v*u)_+^{-1}*(v*u-\hbar i)\big)*(u*v)_-^{-1}\\ &= (u*v)^{-1}-\hbar i(v*u)_+^{-1}*(u*v)_-^{-1}\end{aligned}$$

であるが，積分記号下では結合律が成立していることから，この場合も結合律は成立し，

$$(v*u)_+^{-1}*(u*v)_-^{-1} = \frac{i}{\hbar}\big((v*u)_+^{-1}-(u*v)_-^{-1}\big) \tag{4.4}$$

という計算公式が得られる．これは

$$(uv+\frac{\hbar i}{2})_+^{-1}*(uv-\frac{\hbar i}{2})_-^{-1} = \frac{i}{\hbar}\big((uv+\frac{\hbar i}{2})_+^{-1}-(uv-\frac{\hbar i}{2})_-^{-1}\big)$$

と書いてみれば部分分数分解であることが分かる．しかし，$(uv+\frac{\hbar i}{2})^{-1}$ と $(uv-\frac{\hbar i}{2})^{-1}$ とは連続的につながる式で定義されているのではないことに注意しておかねばならない．

演習問題 1 上と同様の計算で，

$$(u{*}v)_-^{-1} * (v * (v * u)_+^{-1}) = \lim_{T\to\infty} \lim_{S\to\infty} \int_0^T \int_0^S e^{-\frac{\hbar}{2}(t+s)} e_*^{-ituv} * v * e_*^{isuv} dsdt$$

を示し，球撞き補題を使って，結合律

$$(u{*}v)_-^{-1} * (v * (v * u)_+^{-1}) = ((u{*}v)_-^{-1} * v) * (v * u)_+^{-1}$$

を示せ．複雑に見えるが，上と同じことを

$$(v * u)_+^{-1} * (v * (u{*}v)_-^{-1}) = \lim_{T\to\infty} \lim_{S\to\infty} \int_0^T \int_0^S e^{-\frac{\hbar}{2}(t+s)} e_*^{ituv} * v * e_*^{-isuv} dsdt$$

について行うと $(v * u)_+^{-1} * (v * (u{*}v)_-^{-1}) \neq ((v * u)_+^{-1} * v) * (u{*}v)_-^{-1}$ なることを示せ．

任意の多項式 $p(x)$ に対し，$p(x) * (x - \alpha)_\pm^{-1}, (x - \alpha)_\pm^{-1} * p(x)$ は定義でき，$p(x) * (x - \alpha)_\pm^{-1} = (x - \alpha)_\pm^{-1} * p(x)$ であるから

$$(p(x) * (x - \alpha)_\pm^{-1}) * (q(x) * (x - \beta)_\pm^{-1}) = (p(x)q(x)) * \big((x - \alpha)_\pm^{-1} * (x - \beta)_\pm^{-1}\big)$$

と定義しておけば結合律も成立する．これで定理 2.3 のように有理関数体が作られていることが分かる．

$(\alpha + x)_{*+}^{-1}$ だけを使い，$(\alpha + x)_{*-}^{-1}$ を使うことをやめた場合には，$(uv + z)_+^{-1}$ が補題 4.1 により正規順序表示を持つから (2.11)式で積を定義していることを考えれば，$\mathbb{C}[uv]$ と逆元 $(uv + \alpha)_+^{-1}$ で生成される代数の元は全て正規順序表示を持つことが分かる．

ΨDO-型結合律を使うと次が得られる：

補題 4.2 $\mathbb{C}[uv]$ と $\{(uv + \alpha)_+^{-1}; \alpha \in \mathrm{Re}\alpha > -\frac{\hbar}{2}\}$ で生成される結合代数を $\mathfrak{J}$ とすると，$\mathfrak{J}$ の任意の元 $F(uv)$, 及び任意の多項式 $p(u), q(v)$ について，結合律 $p(u) * (F(uv) * q(v)) = (p(u) * F(uv)) * q(v)$ が成立する．

次のことを示しておこう：

補題 4.3 $(uv)_+^{-1} * \varpi_{00} = \frac{2}{\hbar i}\varpi_{00}$ である．これは

$$(uv) * \varpi_{00} = (u{*}v + \frac{\hbar i}{2}) * \varpi_{00} = \frac{\hbar i}{2}\varpi_{00}$$

なので，結果として結合律

$$(uv)_+^{-1} * ((uv) * \varpi_{00}) = ((uv)_+^{-1} * (uv)) * \varpi_{00} \tag{4.5}$$

が成立することを示している．一方，$(uv)_{-}^{-1} * \varpi_{00} = \infty$ である．

証明 しかし，証明は直接計算によるのである．

$$(uv)_{+}^{-1} * \varpi_{00} = i\int_0^{\infty} e_*^{ituv} dt * \varpi_{00}$$

である．$e_*^{ituv} * \varpi_{00}$ は微分方程式 $\frac{d}{dt}f_t = (iuv) * f_t$ の実解析的解として定義されているが，$(iuv) * \varpi_{00} = -\frac{\hbar}{2}\varpi_{00}$ だから，$f_t = e^{-\frac{\hbar t}{2}}\varpi_{00}$ が解であることが分かる．したがって，$i\int_0^{\infty} e^{-\frac{\hbar t}{2}} dt * \varpi_{00} = \frac{2}{\hbar i}$ となるのである．□

結合律は破れていることもあるのだから，結合律を使った説明は証明にはなっていない．

演習問題 2 $(v*u)_{+}^{-(m+1)} = \int_0^{\infty} \frac{t^m}{m!} e_*^{itv*u} dt$, $(u*v)_{-}^{-(m+1)} = \int_0^{\infty} \frac{t^m}{m!} e_*^{-itu*v} dt$ を示せ．

これより，次のことが分かる：

定理 4.2 $uv, (v*u)_{+}^{-1}, (u*v)_{-}^{-1}$ は可換な結合代数を生成する．計算公式は(4.4)で与えられる．しかしこの代数は C^{∞} 位相で完備化すると $*$-積に関して閉じなくなる．

演習問題 3 球撞き補題を用いると $v*(u*v)^{-1} = (v*u)^{-1} * v$ が成立しても良さそうに見えるかも知れないが，$v*(u*v)^{-1} - (v*u)^{-1} * v = F$ と置くと，$u*F = \varpi_{00}$ であることを示せ．

4.2 逆元の解析接続

この節では $x = uv$ で計算を進めるが，これは判別式 $c^2 - ab$ が 1 である 2 次式全部を代表していることを注意しておこう．

まず，逆元の作り方をもっと組織的に考えよう．θ を $-\pi \le \theta < \pi, \theta \ne \pm\frac{\pi}{2}$, の所に固定する．逆元の作り方を見ると，次のような積分も考えたくなるであろう：

$$-ie^{i\theta}\int_0^{\infty} e_*^{ite^{i\theta}(x+\alpha)} dt = -ie^{i\theta}\int_0^{\infty} e^{ite^{i\theta}\alpha} e_*^{ite^{i\theta}x} \tag{4.6}$$

任意の $\alpha = re^{i\eta}$ に対して θ を $\mathrm{Re}(ie^{i\theta+i\eta}) \le 0$ のように選ぶ．すると，積

分 (4.6)は収束し，$x+\alpha$ の逆元を与える．

次の補題は式(4.6)で与えられる逆元が θ の選び方によらないことを示している．

補題 4.4 積分(4.6)は θ が領域 $\mathrm{Re}\, ie^{i\theta+i\eta} \leq 0$ を動いている限り θ の選び方によらない．

証明　式(4.6)を θ で微分すると，

$$e^{i\theta}\int_0^\infty e_*^{ite^{i\theta}(x+\alpha)}dt + e^{i\theta}\int_0^\infty ite^{i\theta}(x+\alpha)*e_*^{ite^{i\theta}(x+\alpha)}dt.$$

となるが，これは部分積分により零となる．なぜなら，$e_*^{ite^{i\theta}(x+\alpha)}$ は t について急減少で $\lim_{t\to\infty} te_*^{ite^{i\theta}(x+\alpha)} = 0$ だからである．　□

特に $\eta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ の場合には，θ, θ' をうまく選んで $\theta+\eta=0,\ \theta'+\eta=-\pi$ となるようにできる．

$$e^{ite^{i\theta}\alpha}=e^{itr}, \qquad e^{ite^{i\theta'}\alpha}=e^{-itr}$$

であるから，どちらを使っても積分 (4.6)は収束する．

この二つの積分が一致しないことは次の補題で確かめられる：

補題 4.5 $\theta'=\theta-\pi,\ \alpha=re^{-i\theta}$ なので，差は

$$-ie^{i\theta}\int_0^\infty e^{irt}e_*^{i(te^{i\theta})x}dt + ie^{i\theta'}\int_0^\infty e^{-irt}e_*^{i(te^{i\theta'})x}dt$$

であり，これは積分

$$-ie^{i\theta}\int_{-\infty}^\infty e^{irt}e_*^{i(te^{i\theta})x}dt = -ie^{i\theta}\int_{-\infty}^\infty e^{irt}\frac{1}{\cosh(\frac{\hbar}{2}te^{i\theta})}e^{i\frac{2}{\hbar}\tanh(\frac{\hbar}{2}te^{i\theta})\,x}dt \tag{4.7}$$

で与えられる．

θ の選びかたから，$e^{i\theta}\neq\pm i$ である．式(4.7)の積分の項は関数

$$f(t;\theta,x)=\frac{1}{\cosh(\frac{\hbar}{2}te^{i\theta})}e^{i\frac{2}{\hbar}\tanh(\frac{\hbar}{2}te^{i\theta})\,x}$$

の t に関するフーリエ変換とみなせる．$f(t;\theta,x)$ は $e^{i\theta}\neq\pm i$ である限り t に関して急減少関数であるからそのフーリエ像は r に関して急減少関数である．

4.2.1 逆元の解析接続

この節で $(z-uv)_{\pm}^{-1}$ の解析接続を考える．解析接続の原理は v^{-1} が定義されているときには

$$v^{-1}*f(uv)*v=f(uv-\hbar i)$$

のように述べて良いものであろうが，v^{-1} は存在してないから，その代わりに $v^{\circ}=u*(v*u)_{+}^{-1}$ を使うものである．$u{*}v=v*u-\hbar i=uv-\frac{\hbar i}{2}$ については $(u{*}v)_{+}^{-1}$ は定義できなかったことを思い出しておいてほしい．

もう一つのやりかたは $u^{\circ}=v*(u*v)_{-}^{-1}$ を用いる方法だが，解析接続される方向は逆になる．

前節と同様に uv について述べるが，これは判別式 $D=1$ の 2 次式を代表していることを思い出そう．

まず補題 4.4 より $(z-uv)_{+}^{-1}$ は $\mathbb{C}-\{ix\,;\,x<-\frac{1}{2}\hbar\}$ に自然に解析接続されていることがわかる．さらに次のことがわかる：

補題 4.6 $\rho\neq\frac{\hbar}{2}$ のとき，$\lambda=(\rho-\frac{\hbar}{2})^{-1}$ と置く．$(uv+\rho i)_{+}^{-1}$ が定義されているならば

$$v^{\circ}*(uv+\rho i)_{+}^{-1}*v-\lambda i\varpi_{00}$$

も定義され，これは $uv+\rho i-\hbar i$ の逆元を与える．この逆元は $(uv+\rho i-\hbar i)_{+}^{-1}$ が前もって積分を使って定義できているときにはそれと一致する．

証明 解析接続と言っているのは $v^{\circ}*(uv+\rho i)_{+}^{-1}*v-\lambda i\varpi_{00}$ を作る手順を繰返し使って逆元を作り出す作業のことである．この作業で $(uv+\rho i-\hbar i)_{+}^{-1}$ がすでに定義されている場合には，球撞き補題と ΨDO-型結合律を使って，

$$v^{\circ}*(uv+\rho i)_{+}^{-1}*v=(v^{\circ}*v)*(uv+\rho i-\hbar i)_{+}^{-1}$$

のように置いて良い．したがって

$$v^{\circ}*(uv+\rho i)_{+}^{-1}*v-\lambda i\varpi_{00}=(1-\varpi_{00})*(uv+\rho i-\hbar i)_{+}^{-1}-\lambda i\varpi_{00} \tag{4.8}$$

だが，$(uv)*\varpi_{00}=\varpi_{00}*(uv)=\frac{\hbar i}{2}\varpi_{00}$ に注意し，補題 4.3 と同様の証明で

$$\varpi_{00}*(uv+\rho i-\hbar i)_{+}^{-1}=-\lambda i\varpi_{00}$$

が分かるから，式(4.8)の左辺はちょうど $(uv+\rho i-\hbar i)_{+}^{-1}$ となる．

$\rho\neq\frac{\hbar}{2}$ で $(uv+\rho i)_{+}^{-1}$ が定義できており，$(uv+\rho i-\hbar i)_{+}^{-1}$ がまだ定義できてい

ない場合を考える．この場合でも

$$v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00} = u*(v*u)_+^{-1} * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - i(\rho - \frac{\hbar}{2})^{-1}\varpi_{00}$$

は定義できる．実はこれが $uv+\rho i - \hbar i$ の逆元であることを示す．

$$\begin{aligned}(uv+\rho i-\hbar i)&*(v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00})\\ &=(uv+\rho i-\hbar i)*u*(v*u)_+^{-1}*(uv+\rho i)_+^{-1}*v+\varpi_{00}\end{aligned}$$

であるが，$(uv+\rho i-\hbar i)*u = u*(uv+\rho i)$ だから

$$(uv+\rho i-\hbar i)*(v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00}) = u*(v*u)_+^{-1}*v+\varpi_{00}=1$$

となる．同様の計算で $(v^\circ*(uv+\rho i)_+^{-1}*v-\lambda i\varpi_{00})*(uv+\rho i-\hbar i)=1$ が分かる．

すると，これまでに定義されている逆元と $\mathbb{C}[uv]$ とで生成される代数に，上のようにして定義された $(uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1}$ を添加しても可換で結合的な代数が得られ，その代数に関して補題 4.2 と同様の結合律が成り立つ．　□

上の補題を使って解析接続していくと，$(uv+\alpha)_+^{-1}$ は α に関して

$$\mathbb{C}_+ = \{\mathbb{C} - \{-(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}\}$$

上で正則であることが分かる．同様のことが u° を用いても言えるので，$\mathbb{C}_- = \{\mathbb{C}-\{(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}\}$ と置いて，次のことが分かる：

系 4.1 $(x+\alpha)_\pm^{-1}$ は $\mathbb{C}_\pm$（復号同順）上で正則である．

この結果は不思議なことを述べている．まず第一に $x=uv$ は時には

$$\mathbb{S}_+ = \{(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\},\quad \text{時には}\quad \mathbb{S}_- = \{-(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}$$

の上を動く不定元のように見える．しかも，どの順序表示によっても等式

$$\cosh_*(\frac{\pi}{\hbar}2uv) = \frac{1}{2}(e_*^{\frac{\pi}{\hbar}2uv} + e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}2uv}) = -1$$

が成立しているから，この描像と矛盾しない．これは

$$\sinh_*(\frac{\pi}{\hbar}2uv) = i\sin_*(\frac{\pi}{\hbar i}2uv) = 0$$

となること，及び uv には二つの逆元が作れるということによっても支持されているのである．

古典的用語では，$\mathbb{S}_+$ と $\mathbb{S}_-$ とを識別できなかったのに対して，量子論的描像ではどちらを採用しても理論に変化はないが，どちらか一方を採用しない

と発散を取り込んでしまうと言っているのである.

どちらの逆元を採用すべきかかは今のところ理論がきめることではなく勝手に選んで良いのだが，区別は必要である.

我々はこの区別を「局面」という言葉で行うことにする：

定理 4.3 逆元として $(uv+\alpha)_+^{-1}$ を使う局面では $x=uv$ は $\{(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}$ を動く不定元，$(uv+\alpha)_-^{-1}$ を使う局面では $x=uv$ は $\{-(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}$ を動く不定元と思える.

$u{*}v=uv-\frac{\hbar i}{2}$, $v{*}u=uv+\frac{\hbar i}{2}$ であったから，上のことは次のようにも言い替えられる：

- $(uv+\alpha)_+^{-1}$ を使う局面では，$\frac{1}{\hbar i}u*v$ は $\mathbb{N}$, $\frac{1}{\hbar i}v*u$ は $\mathbb{N}_1=\{1,2,3,\dots\}$ を動く不定元と思える.
- $(uv+\alpha)_-^{-1}$ を使う局面では，$\frac{1}{\hbar i}u*v$ は $-\mathbb{N}_1$, $\frac{1}{\hbar i}v*u$ は $-\mathbb{N}$ を動く不定元と思える.

しかし，$(\alpha u+\beta v)*(\gamma u+\delta v)$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ とか，$e_*^{\frac{t}{4\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$, $c^2-ab=1$, のようなものはどう考えれば良いのだろうか？ 生成元を $u'=\alpha u+\beta v$, $v'=\gamma u+\delta v$ に替えて上と同じ議論をすれば，$u'v'=\alpha\gamma u^2+\beta\delta v^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)uv$ についても離散描像が得られるが，$u'v'$ と uv は互いに可換ではないから，$u'v'$ の離散描像と uv の離散描像を同時に考えることはできない．しかし，お互い無関係であるはずがないのだが，どのように結びつけて考えれば良いのかはっきりしない．離散描像までくると何を量子正準共役対として使っているのかを明示する必要が出て来る．ここに来て (u,v) と $(-v,u)$ は区別しなければならなくなるのである.

奇妙な事柄 6

uv を $\{(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}$ を動く不定元と見る離散描像の時には $-uv$ は $\{-(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}$ を動く不定元と思う離散描像と思うのは当然のように思われる．しかし，uv と $-uv$ は 2 次形式の空間 $\{au^2+bv^2+2cuv; c^2-ab=1\}$ の中で連続的につながるのである．各 au^2+bv^2+2cuv についても uv の

離散描像と同様の離散描像が描けるのだから離散描像が連続的に追跡できると考えると奇妙である．極地元 ε_{00} の時と同様の現象だが二つの描像を同時に考えることはできないので，$au^2+bv^2+2cuv, c^2-ab=1,$ の離散描像は (a,b,c) に関して連続的には追跡できないとしないといけないように思われる．

コーシーの積分公式

定理4.3で $x=uv$ は $\{(2n+1)\frac{\hbar i}{2}; n\in\mathbb{N}\}$ を動く不定元と思える等と言ったのだが，これの数学的内容が問題である．

$f\in Hol(\mathbb{C})$ に対してコーシーの積分公式を利用して，複号同順で

$$f_*^{\pm}(\frac{1}{\hbar i}uv)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(it)(it+\frac{1}{\hbar i}uv)_{\pm}^{-1}dt \tag{4.9}$$

と定義する．これが半径 r の右（または左）半円に沿う複素積分の $r\to\infty$ の極限で与えられる時には，留数計算で話が収まるから，f が $\mathbb{S}_+$（または $\mathbb{S}_-$）で零となるときには，$f_*^{\pm}(\frac{1}{\hbar i}uv)=0$ となる．

また，$f(t)=g(t)h(t)$ のときには $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z}dz=\pi i$ を使って

$$\begin{aligned}
&g_*^{\pm}(\frac{1}{\hbar i}uv)*h_*^{\pm}(\frac{1}{\hbar i}uv)\\
=&\frac{1}{4\pi^2}\iint g(it)h(is)\frac{1}{i(s-t)}\{(it+\frac{1}{\hbar i}uv)_{\pm}^{-1}-(is+\frac{1}{\hbar i}uv)_{\pm}^{-1}\}dtds\\
=&\frac{1}{2\pi}\int g(it)h(it)(it+\frac{1}{\hbar i}uv)_{\pm}^{-1}dt\\
=&(gh)_*^{\pm}(\frac{1}{\hbar i}uv)
\end{aligned}$$

が得られる．従って，注意してこのような関数の族[注1]に話を限っている場合には $x=uv$ は $\mathbb{S}_+$（または $\mathbb{S}_-$）を動く不定元として扱っていてかまわない．

$x=uv$ とすると $(x_*+z)_{*+}^{-1}$ は $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元であり，かつ z については部分集合 $\mathbb{C}_+$ 上で正則だから，コーシーの積分公式を使うと $(x_*+z)_{*+}^{-1}$ の「値」とでも呼べるようなものを取り出すことができる．

注1 これをきれいな形に書くのは案外面倒な作業である．

C_n を中心が $-(2n+1)\frac{\hbar i}{2}$ で半径 $\frac{\hbar}{4}$ の円周とする．すると一周積分は次のように計算される：

$$\int_{C_n}(u{*}v+\zeta)_+^{-1}d\zeta = \int_{C_n}\zeta^{-1}d\zeta\,\varpi_{00} + u*(v*u)_+^{-1}*\int_{C_n}(u{*}v+\zeta+\hbar i)_+^{-1}d\zeta*v.$$

これを漸化式として使うと，

$$\int_{C_n}(u{*}v+\zeta+n\hbar i)_+^{-1}d\zeta = 0, \quad \int_{C_n}(k\hbar i+\zeta)^{-1}d\zeta = 0, \quad k<n$$

だから，$(u*(v*u)_+^{-1})^n*\int_{C_n}(\zeta+n\hbar i)^{-1}d\zeta\varpi_{00}*v^n$ が残る．一方前の方の計算から

$$(u*(v*u)_+^{-1})^n*\varpi_{00} = \frac{1}{n!(\hbar i)^n}u^n*\varpi_{00}$$

が分かるから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}(u{*}v+\zeta)_+^{-1}d\zeta = \frac{1}{n!(\hbar i)^n}u^n*\varpi_{00}*v^n$$

が得られる．右辺は行列要素 $E_{n,n}$ である．

これより，適宜積分路 C を選んで $\frac{1}{2\pi i}\int_C u^p*(u{*}v+\zeta)_+^{-1}*v^q d\zeta$ を考えれば任意の有限階の行列を線型結合で得ることができる．

発展方程式への応用

これまでの話で exp(2 次式) まではなんとか処理できている．真空表現を考えてみれば，これは 2 階の微分作用素に関する発展方程式を扱っていることになる．しかし，exp(3 次式) となると，これまでの手法では行づまるのである．このような場面で使えるのが，Hille-吉田の定理である．

多項式 $p(x)$ に対して，θ を固定し，$te^{i\theta}+p(x)$ の因数分解を

$$te^{i\theta}+p(x) = a(\omega_1(t)+x)*(\omega_2(t)+x)*\cdots*(\omega_n(t)+x), \quad a,\ \omega_j(t)\in\mathbb{C}$$

とする．固定された θ に対して $\omega_j(t)$ は $t\in\mathbb{R}$ に関して連続と仮定する．

多項式 $p(x)$ が **sectorial polynomial** であるとは，うまく θ を選ぶと各 $\omega_j(t)$ が虚軸と交わるのは $\hbar i\{2n+i; n\in\mathbb{Z}\}$ 以外の所であるようにできる場合を言う．

この節の目的は Hille-吉田の定理 [31]，またはラプラス逆変換を与えるブ

ロムウィッチ(Bromwich)積分の類似で次の定理を示すことである：

定理 4.4 任意の sectorial polynomial $p(x)$ に対して，方程式

$$\frac{d}{dt}f_t(x) = ip(x) * f_t(x), \quad f_0(x) = 1$$

の解が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して得られる．これを $e_*^{itp(x)}$ と定義する．

この解は一般には正則 1 径数群には拡張されないが，この定理の応用範囲は広い．

定理 4.4 の証明はブロムウィッチ積分と呼ばれるラプラス逆変換の公式に基づいている:

$$e_*^{-itp(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}(s+p(x))_{*+}^{-1}ds.$$

まず，$(e^{i\theta}s+p(x))_{*+}^{-1}$ が存在しておれば，積分

$$\frac{e^{i\theta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ise^{i\theta}t}(e^{i\theta}s+p(x))_{*+}^{-1}ds \tag{4.10}$$

が $e_*^{-itp(x)}$ を与えることに注意しよう．従って $(e^{i\theta}s+p(x))_{*+}^{-1}$ を ·-積を用いて部分分数分解して計算する．位相は ·-積の表示で与えられていることに注意しよう．

系 4.2 任意の sectorial polynomial $p(x)$ に対して，ある θ で $(e^{i\theta}s+p(x))_*^{-1}$ が s に関して実軸の近傍で正則であるようにできる．

$(e^{i\theta}s+p(x))_*^{-1}$ を部分分数分解してセミノルムで評価して積分 (4.10)が収束することが分かる．これで定理 4.4 が証明された．

4.2.2　$*$-ガンマ関数

逆元を用いて定義される関数は沢山あるのだが，逆元の作り方が二つあるのだから，それがどのように影響するのか見ておこう．

$*$-ガンマ関数

$*$-指数関数が定義できているから，これを使い，第 2 章の考え方で $*$-積の意味での Γ 関数を定義しておこう．まず，普通の Γ 関数は次のように定義されている：

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

これは，$\mathbb{C}-\{-\mathbb{N}\}$ 上で正則な関数に解析接続できる．$t=e^s$ と変数変換すれば，フーリエ変換の形

$$\Gamma(iz)=\int_{-\infty}^\infty e^{-e^s}e^{isz}ds$$

に書き換えられる．これを利用して複号同順で次のように定義する：

$$\Gamma_*(\pm\frac{uv}{\hbar i})=\int_{-\infty}^\infty e^{-e^s}e_*^{\pm s\frac{uv}{\hbar i}}ds=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-e^s}}{\cosh\frac{s}{2}}e^{\pm\frac{1}{\hbar i}uv\tanh\frac{s}{2}}ds. \qquad (4.11)$$

これが，$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元として定義できていることは容易に分かる．しかも，微積でやるのと同じ部分積分を使う証明で次が成立する：

命題 4.2 $\Gamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})$ は z について $\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Re}z>-\frac{1}{2}\}$ 上で正則で，

$$\Gamma_*(1+z\pm\frac{uv}{\hbar i})=(z\pm\frac{uv}{\hbar i})*\Gamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i}) \ \text{（複号同順）}$$

が成立する．

上の関数等式を使って，$\Gamma_*(z\pm\frac{uv}{\hbar i})$ は $\mathbb{C}-\{-(m+\frac{1}{2});m\in\mathbb{N}\}$ に解析接続される．

しかし，問題はそのとき使う逆元の種類である．2 種類の逆元 $(z+\frac{uv}{\hbar i})_{\pm}^{-1}$ は解析接続で拡張される方向が正反対であったから，前に述べた uv の離散描像 $\{m+\frac{1}{2};m\in\mathbb{N}\}$，$\{-(m+\frac{1}{2});m\in\mathbb{N}\}$ に応じて，使える逆元は $(z+\frac{uv}{\hbar i})_{+}^{-1}$ と $(z-\frac{uv}{\hbar i})_{-}^{-1}$ の形である．これを考えると，Γ-関数は $(z+\frac{uv}{\hbar i})_{+}^{-1}$ を使って解析接続して定義する $\Gamma_*^{+}(z+\frac{uv}{\hbar i})$ と，$(z-\frac{uv}{\hbar i})_{-}^{-1}$ を使って解析接続して定義する $\Gamma_*^{-}(z-\frac{uv}{\hbar i})$ の 2 種類考えなければならない．

系 4.3 $(z+\frac{uv}{\hbar i})_{+}^{-1}, (z-\frac{uv}{\hbar i})_{-}^{-1}$ を使う局面で $\Gamma_*^{+}(z+\frac{uv}{\hbar i})$, $\Gamma_*^{-}(z-\frac{uv}{\hbar i})$ は z について，ともに $\mathbb{C}-\{-(m+\frac{1}{2});m\in\mathbb{N}\}$ に解析接続される．

実は，Γ_*^+ も Γ_*^- も “同じ” 関数で，ただ関数記号の中に入っているものが違うだけと見て良いのだが，これは誤解の種だからしばらくは区別して考える．

一方，$e_*^{\pm s\frac{u*v}{\hbar i}} = e^{\mp\frac{s}{2}}e_*^{\pm s\frac{uv}{\hbar i}}, e_*^{\pm s\frac{v*u}{\hbar i}} = e^{\pm\frac{s}{2}}e_*^{\pm s\frac{uv}{\hbar i}}$ であり，$e^{-e^s}e^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\cosh\frac{s}{2}}$ は急減少関数だが，$e^{-e^s}e^{-\frac{s}{2}}\frac{1}{\cosh\frac{s}{2}}$ は $s \to -\infty$ の所で有界にしかなっていないので，上の積分では $\Gamma_*^-(-\frac{u*v}{\hbar i})$, $\Gamma_*^+(\frac{v*u}{\hbar i})$ は定義できるが，$\Gamma_*^-(\frac{u*v}{\hbar i})$, $\Gamma_*^+(-\frac{v*u}{\hbar i})$ は定義できないようになっている．解析接続を使うと，

$$\Gamma_*^-(z-\frac{u*v}{\hbar i}), \quad \Gamma_*^+(z+\frac{v*u}{\hbar i})$$

は $\mathbb{C}-\{-1,-2,-3,\dots\}$ で定義される．別に言えば，$\Gamma_*^-(z-\frac{1}{\hbar i}u*v)$ は $\frac{1}{\hbar i}u*v$ の描像が $-\mathbb{N}_1$ のときに，$\Gamma_*^+(z+\frac{1}{\hbar i}v*u)$ は $\frac{1}{\hbar i}v*u$ の描像が $\mathbb{N}_1$ のときに定義される．しかし，$\Gamma_*^-(\frac{1}{\hbar i}v*u)$ とか，$\Gamma_*^+(-\frac{1}{\hbar i}u*v)$ のようなもは考えられないのであろうか？ これは $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ の元として定義することはできないが，離散描像の方を使って考えることはできる：

$\frac{uv}{\hbar i} = \{m+\frac{1}{2}; m \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\frac{uv}{\hbar i} = \{-(m+\frac{1}{2}); m \in \mathbb{N}\}$) の離散描像をあてはめて計算すると，$\frac{uv}{\hbar i} = m+\frac{1}{2}$, $\frac{uv}{\hbar i} = -(m+\frac{1}{2})$ に応じて，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^s}e_*^{-s\frac{uv}{\hbar i}}ds, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^s}e_*^{s\frac{uv}{\hbar i}}ds$$

は収束するが，符号を逆にしたものは発散する．つまり，離散描像では使う局面に応じて $\Gamma_*^+(z+\frac{uv}{\hbar i})$, $\Gamma_*^-(z-\frac{uv}{\hbar i})$ が定義できる．ところが，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^s}e_*^{\pm s(m+\frac{1}{2})}ds$$

は普通の Γ-関数 $\Gamma(z\pm(m+\frac{1}{2}))$ でしかないのだから，$m+\frac{1}{2}$ が整数でないことより，解析接続で定義できている訳である．さらに，この考察から，Γ_*^+ と Γ_*^- は同じ関数と見なして良いことも分かる．uv の代わりに $u*v$ とか $v*u$ を用いて変域を $\frac{1}{2}$ だけずらしたものは，$\Gamma_*^+(z+\frac{v*u}{\hbar i})$, $\Gamma_*^-(z-\frac{u*v}{\hbar i})$ が定義できている．

しかし，$\Gamma_*^+(-\frac{v*u}{\hbar i})$, $\Gamma_*^-(+\frac{u*v}{\hbar i})$ のようなものは普通の Γ-関数の $-\mathbb{N}$ での値を考えることになり，発散してしまう．したがって，むしろ

$$\frac{1}{\Gamma_*^+(-\frac{v*u}{\hbar i})} = \frac{1}{\Gamma_*^-(+\frac{u*v}{\hbar i})} = 0$$

と考えるべきものである．以下でこのことの(少しギャップがある)証明を与える．

Γ-関数は無限乗積

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}$$

で表されるし，

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = \frac{z}{\pi}\sin\pi z$$

という関数等式がある．この等式は無限乗積を使って与えられるので，$*$-積を使っても成立しているかどうかは分からないものである．後の等式から

$$\frac{1}{\Gamma(-z)} = \Gamma(z)\frac{z}{\pi}\sin\pi z, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \Gamma(-z)\frac{z}{\pi}\sin\pi z$$

であるから，積分公式(4.9)を使って，

$$\begin{aligned}\Gamma_*^+(-\frac{v*u}{\hbar i})^{-1} =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(it)\frac{it}{\pi}\sin\pi it\big(it-\frac{v*u}{\hbar i}\big)_+^{-1}dt \\ =& \Gamma_*^+(\frac{v*u}{\hbar i}) * \frac{1}{\hbar i}v*u*\sin_*\frac{\pi}{\hbar i}v*u\end{aligned}$$

となるのは自然に思われる．

ところで，$*$-積では $e_*^{\frac{2\pi i}{\hbar i}uv} = -1$ より，$e_*^{\frac{2\pi i}{\hbar i}v*u} = 1$ であった．したがって $\sin_*\frac{2\pi}{\hbar i}v*u = 0$ である．さらに (3.36)を使えば $\sin_*\frac{\pi}{\hbar i}v*u = 0$ も分かる．一方 $\Gamma_*^+(\frac{v*u}{\hbar i})$ は定義できているから，$\Gamma_*^+(-\frac{1}{\hbar i}v*u) = 0$ は極めて自然に見えるだろう[注2]．離散描像を使った考察では $\Gamma_*^+(\frac{1}{\hbar i}v*u)$, $\Gamma_*^-(-\frac{1}{\hbar i}u*v)$ は可逆であるから整合性はある．

4.2.3 離散描像から $Cliff_\infty$ へ

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ とする．$u*v$ を $\hbar i\mathbb{N}$ を動く不定元と思う局面(つまり，$(uv+z)_+^{-1}$ を使う局面)を選んだとき，これを

$$(u*v)(m) = \hbar im, \quad (v*u)(m) = \hbar i(m+1), \quad m\in\mathbb{N}$$

注2 $\Gamma_*^+(\frac{v*u}{\hbar i}) \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ ということしか分からないから，実はこの結論が正しいかどうか疑が残るのである．

のようにℕからの写像のように思うことにする．すると，$e_*^{itu*v}(m) = e^{-\hbar tm}$ だが

$$\varpi_{00} = \lim_{t\to\infty} e_*^{itu*v}, \quad \varepsilon_{00} = e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$$

だったから，

$$\varpi_{00}(m) = \delta_{0,m}, \quad \varepsilon_{00}(m) = i(-1)^m$$

と考えることが出来る．$\delta_{0,m}$ はクロネッカーの δ である．しかし，$\bar{\varpi}_{00}(m)$ は定義できない．

一方，$e_*^{ituv}(m) = e^{-\hbar t(m+\frac{1}{2})}$ だから，このまま積分を考えてやると

$$-i\int_0^\infty e_*^{ituv}(m)dt = \frac{i}{m+\frac{1}{2}} = (uv)_+^{-1}(m)$$

だが，$\int_{-\infty}^0 e_*^{ituv}(m)dt$ は収束しない．

つまり，離散描像を使って結論されることがそのまま $*$-積に関して一般に成立すると考えてはいけないだろうが，しかし**局面を選んで，その描像でも意味のあるものに限定すると結合律を壊さないですむように見える**のである．結合律を保持する為に作用素表現をしなければいけないと思い込む必要はないのである．

このような雰囲気を代表して，離散描像と球撞き補題だけから結合代数を作ることができるので，その話を述べよう．$\Phi(\mathbb{N})$ を ℕ から ℂ への写像の全体とする．$f \in \Phi(\mathbb{N})$ に対してして $v^{\circ k} * f(\frac{1}{\hbar i}u*v) * v^l$ の形の元を考えるのである．

$$v^k * f(\frac{1}{\hbar i}u*v) * v^{\circ k} = f(\frac{1}{\hbar i}u*v + k)$$

を使って演算を定義すると，結合代数が得られる．

このような離散的描像から自然にクリフォード代数 $Cliff_\infty$ が得られることを説明しよう．これはボソンとかフェルミオンとか言っているものも，実は微積分の代数の中に自然に含まれているということを説明しようというものである: 次のように定義しよう:

$$\delta_{ev}(m) = \begin{cases} 1, & m = 2k, \\ 0, & m = 2k+1, \end{cases} \qquad \delta_{od}(m) = \delta_{ev}(m+1). \tag{4.12}$$

上の定義は離散描像を使って定義しているのであるが，このような写像はすべて $f(\frac{1}{\hbar i}u{*}v)$ の形に書くことができるのである．例えば

$$\delta_{ev}=\cos^2_*(\frac{\pi}{2\hbar i}u{*}v),\quad \delta_{od}=\sin^2_*(\frac{\pi}{2\hbar i}u{*}v)=\cos^2_*(\frac{\pi}{2\hbar i}v{*}u)$$

とすれば良いのであるが，式が長くなるので，以下ではこのような関数形は書かないで $\delta_{ev}(m)$ のような写像として扱う．これは便利だからそうするだけの話で論理的にはあくまで $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中での話として考えているということを注意してもらいたい．非論理的に離散描像の方にジャンプしているのではない．

任意の自然数 k に対して

$$\delta_{ev}(m)=\delta_{ev}(m+2k),\quad \delta_{od}(m)=\delta_{od}(m+2k)$$

であることに注意する．さらに，$\delta_{ev}+\delta_{od}=1$,

$$\varpi_{00}*\delta_{od}=\delta_{od}*\varpi_{00}=0,\quad \varpi_{00}*\delta_{ev}=\varpi_{00}$$

にも注意する．上の式 (4.12)を使い $\xi=\delta_{ev}*v$, $\eta=v^\circ*\delta_{ev}$ と定義する．$v^\circ=u*(v*u)^{-1}$ と球撞補題から容易に次のことが分かる：

$$\xi=v*\delta_{od},\quad \eta=\delta_{od}*v^\circ,\quad v^\circ*\delta_{od}=\delta_{od}*v^\circ.$$

v,v° を入れ換える計算の中では $\delta_{ev}(m-1)$ のようなものが現れるが，それらは $\delta_{ev}(m+2k-1)$ と考えて計算する．また上の計算では

$$\delta_{ev}*v^\circ=u*\delta_{od}*(v*u)^{-1}=u*(v*u)^{-1}*\delta_{od}$$

も使っている．

$\delta_{ev}*\delta_{od}=0$ さらに $\delta_{ev}^2=\delta_{ev}$ だから，$v^\circ=u*(v*u)^{-1}$, $v*v^\circ=1$, $v^\circ*v=1-\varpi_{00}$, を使って，次が得られる：

$$\xi*\xi=0,\quad \eta*\eta=0,\quad \xi*\eta+\eta*\xi=\delta_{ev}+\delta_{od}=1. \tag{4.13}$$

最後の式は次のように計算する：

$$\begin{aligned}\xi*\eta=&v*\delta_{ev}*\delta_{ev}*v^\circ=(1-\varpi_{00})*\delta_{od}=\delta_{od},\\ \eta*\eta=&\delta_{ev}*v^\circ*v*\delta_{ev}=\delta_{ev}.\end{aligned}$$

これより $1, \xi, \eta, \xi * \eta$ で 2×2 行列全体を張っていることが分かる．ξ, η は

$$v^2 * \xi * v^{\circ 2} = \xi, \quad v * \eta * v^{\circ 2} = \eta$$

をみたす変数であることを考えて，これらを周期が2の周期行列と見ることができる．次は容易であろう：

$$v * \xi = \eta * v, \quad v * \eta = \xi * v, \quad v^\circ * \xi = \eta * v^\circ, \quad v^\circ * \eta = \xi * v^\circ. \tag{4.14}$$

式(4.14)より，パウリ行列を作ることができる：

$$\sigma_1 = \xi + \eta, \quad \sigma_2 = -i\xi + i\eta, \quad \sigma_3 = \xi * \eta - \eta * \xi \tag{4.15}$$

と置くと，次が成立する：

$$\begin{gathered}{\sigma_1}^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1, \quad \sigma_i * \sigma_j = -\sigma_j * \sigma_i \\ \sigma_1 * \sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2 * \sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3 * \sigma_1 = i\sigma_2, \\ v * \sigma_1 = \sigma_1 * v, \quad v * \sigma_2 = -\sigma_2 * v, \quad v * \sigma_3 = -\sigma_3 * v.\end{gathered} \tag{4.16}$$

似たような方法でもっと周期の長いものを作ることができる．$k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して E_{2^k}, F_{2^k} を次のような元としよう：

$$E_{2^k}(m) = \begin{cases} 1, & 0 \le m < 2^{k-1}, \quad \bmod 2^k \\ 0, & 2^{k-1} \le m < 2^k, \quad \bmod 2^k, \end{cases} \quad F_{2^k}(m) = v^{2^{k-1}} * E_{2^k} * v^{\circ 2^{k-1}}. \tag{4.17}$$

すると容易に

$$E_{2^k} * F_{2^k} = F_{2^k} * E_{2^k} = 0,\ E_{2^k} * v^{2^{k-1}} = v^{2^{k-1}} * F_{2^k},\ v^{\circ 2^{k-1}} * E_{2^k} = F_{2^k} * v^{\circ 2^{k-1}}$$

が分かる．$E_{2^k} + F_{2^k} = 1$ だから，上と同様の計算で

$$\begin{gathered}(E_{2^k} * v^{2^{k-1}})^2 = (v^{\circ 2^{k-1}} * E_{2^k})^2 = 0, \\ E_{2^k} * v^{2^{k-1}} * F_{2^k} * v^{\circ 2^{k-1}} + F_{2^k} * v^{\circ 2^{k-1}} * E_{2^k} * v^{2^{k-1}} = 1\end{gathered} \tag{4.18}$$

が分かる．任意の正整数 k に対して

$$\xi_k = E_{2^k} * v^{2^{k-1}},\ \eta_k = v^{\circ 2^{k-1}} * E_{2^k}$$

とおけば次のようになる：

補題 4.7 これらの元は 2^k 周期，つまり $v^{2^k}, v^{\circ 2^k}$ と可換であり，$\xi_k^2 = \eta_k^2 = 0$，$\xi_k * \eta_k + \eta_k * \xi_k = 1$ をみたす．しかも $k \neq l$ のとき次が成り立つ：

$$\xi_k * \xi_l = \xi_l * \xi_k, \ \eta_k * \eta_l = \eta_l * \eta_k, \ \xi_k * \eta_l = \eta_l * \xi_k$$

証明 後ろの二つの等式を示せば十分であろう．$0 < l < k$ としておく．E_{2^l} は 2^k 周期だから，$\xi_k * \xi_l = E_{2^k} * e^{2^k ix} * E_{2^l} * e^{2^l ix} = E_{2^k} * E_{2^l} * e^{(2^k+2^l)ix}$ であるが $\xi_l * \xi_k = E_{2^l} * e^{2^l ix} * E_{2^k} * e^{2^k ix} = e^{(2^k+2^l)ix} * F_{2^k} * F_{2^l}$ も分かる．$F_{2^k} * F_{2^l}$ の $k+l$-シフトは $E_{2^k} * E_{2^l}$ であるから欲しい等式が得られる．似たような計算で最後のものも得られる． □

$1, \xi_k, \eta_k, \xi_k{*}\eta_k$ の作る代数を $M_k(2)$ とすると，上の関係式は $l \neq k$ の時には $1, \xi_k, \eta_k, \xi_k{*}\eta_k, \xi_l, \eta_l, \xi_l{*}\eta_l$ の作る代数は $M_l(2) \otimes M_k(2)$ と考えて良いことを示している．

そこで，$\{1, \xi_k, \eta_k, \xi_k{*}\eta_k; k \in \mathbb{N}\}$ で生成される代数を考えれば，これは

$$M_1(2) \otimes M_2(2) \otimes \cdots \otimes M_k(2) \otimes \cdots$$

と同型となる．ただし，上のものは

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n \otimes I \otimes I \otimes I \otimes \cdots$$

のようにどこからか先は単位行列が並ぶテンソル積の全体である．これを $M(2)^{\otimes\infty}$ と書くことにする．

ξ_k, η_k を使って (4.15)式と同様にしてパウリ行列 $\sigma_i^k, i = 1, 2, 3$ を作ると σ_i^k は自然に

$$\sigma_i^k = I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{k}{\breve{\sigma_i}} \otimes I \otimes I \otimes \cdots$$

と同一視できる．ただし I は 2×2 単位行列である．

上の σ_i^k を使ってクリフォード代数を作って見よう．

$$\begin{aligned}
&\gamma^1 = \sigma_1 \otimes I \otimes I \otimes I \otimes I \otimes I \otimes \cdots, && \gamma^2 = \sigma_2 \otimes I \otimes I \otimes I \otimes I \otimes I \otimes \cdots, \\
&\gamma^3 = \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes I \otimes I \otimes I \otimes \cdots, && \gamma^4 = \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes I \otimes I \otimes I \otimes \cdots, \\
&\gamma^5 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes I \otimes \cdots, && \gamma^6 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes I \otimes \cdots, \\
&\gamma^7 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes I \otimes \cdots, && \gamma^8 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes I \otimes \cdots, \\
&\quad \vdots && \quad \vdots
\end{aligned}$$

と定義すると，容易に

$$\gamma^i\gamma^j+\gamma^j\gamma^i=2\delta^{ij},\quad 1\le i,j<\infty$$

が分かる．これで定義した結合代数をクリフォード(Clifford)代数と呼び，$Cliff_\infty$ と書く．

$$\xi_k=\frac{1}{2}(\gamma^{2k-1}+i\gamma^{2k}),\quad \eta_k=\frac{1}{2}(\gamma^{2k-1}-i\gamma^{2k})$$

とおけば，

$$\{\xi_i,\xi_j\}=0=\{\eta_i,\eta_j\},\quad \{\xi_i,\eta_j\}=\delta_{ij}$$

という式も得られる．ただし，$\{a,b\}=ab+ba$ である．

様々な元の クリフォード代数による表示

これまでのようにワイル代数を基礎にした表示を物理の方では「ボゾン的表示」と呼ぶらしいが，それでいくと，以下で述べるのは「フェルミオン的表示」と呼んでも良いだろう[注3].

補題 4.8 σ_i を k 個テンソルした元，$\sigma_{i_1}\otimes\sigma_{i_2}\otimes\cdots\otimes\sigma_{i_k}\otimes I\otimes I\otimes\cdots$ は積作用素として上の空間線型写像と見ると，2^k 周期行列になっている．

しかも，$\sigma_{i_1}\otimes\sigma_{i_2}\otimes\cdots\otimes\sigma_{i_m}$ を動かせば 2^m 周期行列がすべて得られる．

これらをもとにして ∞ 次の単位行列や，ワイル代数の生成元を作りだして見よう．まず次は容易に分かる：

$$\cos_*(\frac{\pi}{\hbar i}u{*}v)=(\xi\eta-\eta\xi)\otimes I\otimes I\otimes\cdots\otimes I\otimes\cdots$$

$$\cos_*(\frac{\pi}{2\hbar i}u{*}v)=(\xi\eta)\otimes(\xi\eta-\eta\xi)\otimes I\otimes I\otimes\cdots\otimes I\otimes\cdots.$$

$$\sin_*(\frac{\pi}{2\hbar i}u{*}v)=(\eta\xi)\otimes(\xi\eta-\eta\xi)\otimes I\otimes I\otimes\cdots\otimes I\otimes\cdots.$$

注3 この考え方でいくと，同じものがボゾン的表示と，フェルミオン的表示の両方持ってもかまわないことになる．しかし，実際は正規順序表示とワイル順序表示のときのように，表示されるものはかなり違ったものであるらしい．しかも相互変換の公式というのもかなり書きにくい．

これより，

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}u*v} = (\xi\eta + i\eta\xi)\otimes(\xi\eta - \eta\xi)\otimes I\otimes I\otimes\cdots\otimes I\otimes\cdots.$$

$(a\xi\eta + b\eta\xi) * (c\xi\eta + d\eta\xi) = (ac\,\xi\eta + bd\,\eta\xi)$ であることに注意して計算すると，$u*v = uv - \frac{\hbar i}{2}$ だから

$$\varepsilon_{00} = e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv} = i(\xi\eta - \eta\xi)\otimes I\otimes I\otimes\cdots\otimes I\otimes\cdots$$

が分かる．

1 の m 乗根を $\omega_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ とすると，$e_*^{\frac{2\pi}{2^m\hbar}u*v}$ は 2^m 周期行列であるから，これを使って考えれば

$$e_*^{\frac{2\pi}{2^m\hbar}u*v} = (\xi\eta + \omega_{2^m}\eta\xi)\otimes(\xi\eta + \omega_{2^{m-1}}\eta\xi)\otimes\cdots\otimes(\xi\eta + \omega_2\eta\xi)\otimes I\otimes I\otimes\cdots$$

であることが分かるから，任意の 2 進有限小数 t に対して $e_*^{\frac{2\pi t}{\hbar}u*v}$ が次のような形に書かれることが分かる：

$$e_*^{\frac{2\pi t}{\hbar}u*v} = (\xi\eta + e^{2\pi it}\eta\xi)\otimes(\xi\eta + e^{4\pi it}\eta\xi)\otimes\cdots\otimes(\xi\eta + e^{2^m\pi it}\eta\xi)\otimes\cdots.$$

t が有限小数なので，ある番号 m から先は $I\otimes I\otimes\cdots$ となる．形式的に無限に続くテンソル積を考えるならば任意の $t\in\mathbb{R}$ についても考えられる．さらに，上の式を形式的に微分して $t=0$ と置けば，

$$\frac{1}{\hbar i}u*v = \sum_{k\geq 1} 2^{k-1} I\otimes\cdots\otimes I\otimes\overbrace{(\eta\xi)}^{k}\otimes I\otimes I\cdots$$

となることも分かる．これは (3.53)で $\frac{1}{\hbar i}u*v$ が対角行列

$$diag\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

で表現されていたことに対応する．

$$U_1 = \sum_{k\geq 1} \eta\otimes\eta\otimes\cdots\otimes\eta\otimes\overbrace{\xi}^{k}\otimes I\otimes I\otimes\cdots,$$

$$L_1 = \sum_{k\geq 1} \xi\otimes\xi\otimes\cdots\otimes\xi\otimes\overbrace{\eta}^{k}\otimes I\otimes I\otimes\cdots$$

はそれぞれ，対角線の一つ上，下に1の並んだ行列として表示される．

真空 ϖ_{00} を表示するには無限テンソル積を使わねばならないが，

$$\varpi_{00} = (\xi\eta)\otimes(\xi\eta)\otimes\cdots\otimes(\xi\eta)\otimes\cdots$$

とすればよい．また I_i を 2×2 単位行列とすると

$$I_1\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_k\otimes(\xi\eta)\otimes\cdots\otimes(\xi\eta)\otimes\cdots$$

は最初の $2^k\times 2^k$ の所にある単位行列となる．

$\xi(\xi\eta)=0, \eta(\xi\eta)=\eta$ であるから，$Cliff_{\infty}\varpi_{00}$ は $\varepsilon_i=0,1$ として

$$\eta^{\varepsilon_1}\otimes\eta^{\varepsilon_2}\otimes\eta^{\varepsilon_3}\otimes\cdots\otimes\eta^{\varepsilon_k}\varpi_{00}$$

の1次結合となる．自然数 n を2進整数と思って表示したものを $[n]_2$ と書けば

$$[n]_2 = \varepsilon_k\cdots\varepsilon_6\varepsilon_5\varepsilon_4\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1 \qquad \text{(有限整数)}$$

のように0,1の有限列だから，これを逆に並べた $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\varepsilon_k$ を作り，さらに $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\varepsilon_k00000\cdots$ のようにしておく．こうしておいて，$\varepsilon_i=0$ には 1, $\varepsilon_i=1$ には η を対応させ，

$$\eta_{[n]_2} = \eta^{\varepsilon_1}\otimes\eta^{\varepsilon_2}\otimes\eta^{\varepsilon_3}\otimes\cdots\otimes\eta^{\varepsilon_k}\otimes 1\otimes\cdots\varpi_{00}$$

とする．そこでこの番号によって単項式を横一列に並べてこれを表現空間の基底にする．$\eta_0=1$ と約束しておいて，

$$(\eta_0,\eta_1,\eta_{01},\eta_{11},\eta_{001},\eta_{101},\eta_{111},\eta_{0001},\cdots) \tag{4.19}$$

のようにするのである．

同様の表示で $[n]_2$ を $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\varepsilon_k00000\cdots$ のようにしたものに対して $\varepsilon_i=0$ には $\xi\eta$, $\varepsilon_i=1$ には $\eta\xi$ を対応させることにしてこれを J^{ε_i} と書き

$$J_{[n]_2} = J^{\varepsilon_1}\otimes J^{\varepsilon_2}\otimes J^{\varepsilon_3}\otimes\cdots\otimes J^{\varepsilon_k}\otimes J^0\otimes J^0\otimes\cdots$$

とする．

無限テンソル積を使う表示では

$$\sum_{k\geq 0}(a_{2k}\xi\eta + a_{2k+1}\eta\xi)^{\otimes}J_{[k]}$$

とすれば対角行列 $diag\{a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ を作ることができる．しかもこれは $\xi\eta$ を $1-\eta\xi$ に置き換える操作を k 桁目には 2^k 周期で行って，容易に有限テンソル積の無限和に書き直せる．

量子力学を考えると言ってワイル代数から出発したが，ここまで来るとワイル代数の元は様々な表示を持っていることが分かるであろう．我々が考える量子力学とは数学的には**ワイル順序表示，正規順序表示，クリフォード代数表示，テープリッツ代数表示**といった様々な表示を持った**完備ワイル空間の集合体**なのである．可換代数は表示を一定にして既成の数学を使いやすくするための補助線にすぎないと考えているのである．

4.3 真空の積公式

完備ワイル空間の中では半逆元の他に,「真空」と称する元が現れることが単にワイル代数を考えるのと大きく変わることであった．ところで，真空，半逆元を含む積を勝手に作るとしばしば発散を起こすのと，結合律がいつでも成立する訳ではないというやっかいなことが起こっていた．真空とか半逆元という概念は $*$-積だけできまる概念ではなく，使っている生成元(座標系)に依存する局所的概念，または相対的概念である．このことは，**一般に真空表現と呼ばれているものも局所的概念，または相対的概念**だと言っていることになるから，重要な意味を持っている．

$$\varpi_{00} = 2e^{\frac{2iuv}{\hbar}} = \lim_{t\to\infty} e_*^{ituv}, \quad \bar{\varpi}_{00} = 2e^{\frac{-2iuv}{\hbar}} = \lim_{t\to\infty} e_*^{-itv*u},$$

$$\tilde{\varpi}_0 = 2e^{\frac{-z\bar{z}}{\hbar}} = \lim_{t\to\infty} e_*^{-tz*\bar{z}}$$

がこれまで現れた原点に対応する真空のリストである．

$v*\varpi_{00} = 0 = \varpi_{00}*u$, $u*\varpi_{00} = 2u\varpi$, $\varpi_{00}*v = \varpi_{00}\cdot 2v$ であるから，ϖ_{00} の左側には u の関数が来るだけである．我々は**真空が描像を作る**といっ

たように考えている．つまり，古典的描像で作られている微分幾何学は，すでに何らかの真空を無意識に選んで書かれていると思っているのである．これは物理にも言えることで，色々な立場の物理が色々な真空を選んで書かれていて，ややもすると「どちらの描像が正しいか」という不毛な論議を重ねているようにも見えるのである．

4.3.1　真空同士の積公式

(3.15), (3.16), および (3.26)の計算より

$$\varpi_{00} * \varpi_{00} = \varpi_{00}, \quad \bar{\varpi}_{00} * \bar{\varpi}_{00} = \bar{\varpi}_{00}, \quad \varpi_{00} * \bar{\varpi}_{00} = \infty, \quad \tilde{\varpi}_0 * \tilde{\varpi}_0 = \tilde{\varpi}_0$$

が得られている．

$e_*^{it(u-a)(v-b)}$ は発展方程式の初期値 1 の実解析的解で定義されていたから，

$$\varpi_{a,b} = \lim_{t\to\infty} e_*^{it(u-a)*(v-b)}, \quad \varpi_{a,b} * \varpi_{a,b} = \varpi_{a,b}$$

であり，$(v-b) * \varpi_{a,b} = 0 = \varpi_{a,b} * (u-a)$ が成立する．

平行移動の同型写像（命題 1.3 参照）により，次の公式は成立する：

$$e_*^{\frac{it}{\hbar}(bu-av)} * \varpi_{00} * e_*^{-\frac{it}{\hbar}(bu-av)} = \varpi_{a,b}. \tag{4.20}$$

一方，$v * \varpi_{00} = \varpi_{00} * u = 0$ だから，指数関数の方をマクローリン展開して計算すれば

$$\varpi_{0,b} = e_*^{\frac{it}{\hbar}bu} * \varpi_{00} * e_*^{-\frac{it}{\hbar}bu} = e_*^{\frac{it}{\hbar}bu} * \varpi_{00}$$

$$\varpi_{a,0} = e_*^{-\frac{it}{\hbar}av} * \varpi_{00} * e_*^{\frac{it}{\hbar}av} = \varpi_{00} * e_*^{\frac{it}{\hbar}av}$$

ということも分かる．これは，微分方程式を初期関数 ϖ_{00} で解いても分かる．だから，

$$\varpi_{00}*\varpi_{a,0} = \varpi_{a,0}, \ \varpi_{a,0}*\varpi_{00} = \varpi_{00}, \ \varpi_{0,b}*\varpi_{00} = \varpi_{0,b}, \ \varpi_{00}*\varpi_{0,b} = \varpi_{00}$$

が成立し，さらに $v * \varpi_{0,b} = b\varpi_{0,b}$ だから

$$\varpi_{a,b} = e_*^{-\frac{it}{\hbar}av} * \varpi_{0,b} * e_*^{\frac{it}{\hbar}av} = e^{-\frac{it}{\hbar}ab}\varpi_{0,b} * e_*^{\frac{it}{\hbar}av}$$

を使って

$$\varpi_{0,b} * \varpi_{a,b} = \varpi_{a,b}, \quad \varpi_{a,b} * \varpi_{0,b} = \varpi_{0,b}$$

も得られる．

$e_*^{\frac{it}{\hbar}(bu-av)} * e_*^{itav} = F_t(u)$ と置けば，

$$\frac{d}{dt}F_t(u) = e_*^{\frac{it}{\hbar}(bu-av)} * \frac{ibu}{\hbar} * e_*^{\frac{it}{\hbar}av} = F_t(u) * (\frac{ibu}{\hbar} + abt)$$

だから，$e_*^{\frac{i}{\hbar}(bu-av)} = e^{\frac{ab}{2}} e^{-\frac{iav}{\hbar}} * e^{\frac{ibu}{\hbar}}$ であり，これを使って次の公式が得られる：

$$\begin{aligned}\varpi_{a,b} =& e^{-\frac{iav}{\hbar}} * e^{\frac{ibu}{\hbar}} * \varpi_{00} * e^{-\frac{ibu}{\hbar}} * e^{\frac{iav}{\hbar}} = e^{-\frac{iav}{\hbar}} * \varpi_{0,b} * e^{\frac{iav}{\hbar}} \\ =& e^{-\frac{iab}{\hbar}} \varpi_{0,b} * e^{\frac{iav}{\hbar}} = e^{-\frac{iab}{\hbar}} e^{\frac{ibu}{\hbar}} * \varpi_{00} * e^{-\frac{ibu}{\hbar}} * e^{\frac{iav}{\hbar}} \\ =& e^{-\frac{iab}{\hbar}} e^{\frac{ibu}{\hbar}} * \varpi_{00} * e^{\frac{iav}{\hbar}}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

従って，

$$\varpi_{00} * \varpi_{a,b} = e^{-\frac{iab}{\hbar}} * \varpi_{a,0} \quad \varpi_{a,b} * \varpi_{00} = e^{-\frac{iab}{\hbar}} * \varpi_{0,b}$$

となり，平行移動を考えれば，一般に

$$\varpi_{a,b} * \varpi_{a',b'} = e^{\frac{i(a'-a)(b'-b)}{\hbar}} * \varpi_{a',b} \tag{4.22}$$

という積公式になることが分かる．真空同士の積ではこれまでの結合律定理は使えないが，直接計算してしまうことができる[注4]．

演習問題 4 直接計算することにより

$$(\varpi_{a',b'} * \varpi_{a,b}) * \varpi_{c,d} = \varpi_{a',b'} * (\varpi_{a,b} * \varpi_{c,d})$$

であることを確かめよ．

これらは平行移動で移りあっている真空同士の積公式であるが，一般のものは公式ができていない．これを次節で考えよう．

注4 この辺まで来ると，結合律が破れているのはそれほど恐いことではないということが分かるであろう．発散の困難に比べればこれはまだ何とかなるものに見えるだろう．

4.3.2　真空の積公式 (II)

前節で，平行移動で移りあっている真空同士の積公式は分かったことになるが，真空として定義したものはもっと沢山ある．真空全体の集合はワイル順序表示では連結集合であり，

$$\mathcal{V} = \{2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\ c^2-ab+1=0\}$$

で与えられる．この上に $SL(2;\mathbb{C})$ が生成元の一次変換として推移的に自然に働く．$e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ も $e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ もこの中に含まれている．

真空同士の $*$-積は必ずしも定義されない．これは $e^{\frac{2i}{\hbar}uv} * e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ が定義されないことからもわかる．しかし，後で述べる積公式(5.27)により，真空同士の $*$-積の公式を作ることができる．

$c^2-ab+1=0$ のときには

$$2e^{\frac{i}{\hbar}2uv} * 2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = \frac{4}{\sqrt{2(1-ci)}}e^{\frac{1}{\hbar}(\frac{b}{1-ci}v^2+2iuv)} \tag{4.23}$$

である．

$1-ci\neq 0$ の場合には $2e^{\frac{1}{\hbar}(\frac{b}{1-ci}v^2+2iuv)}$ は真空である．$1-ci=0$ の場合には $c=-i$ で $2e^{\frac{i}{\hbar}2uv} * 2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2-2iuv)}$ はワイル順序表示では発散してしまう．しかし，正規順序表示では

$$\varpi_{00} * f_\circ(u,v) = \varpi_{00}\circ f_\circ(0,v)$$

であるから正規順序表示でなら計算できるように見えるが，$2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2-2iuv)}$ が真空であるならば $ab=0$ でなければならず，このような元を正規順序表示のほうに相互変換してやると発散してしまうことが分かる．

同じ計算だが $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ で $\alpha\delta\neq 0$ ならば

$$2e^{\frac{2i}{\hbar}uv} * 2e^{\frac{2i}{\hbar}(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)} = \frac{2}{\sqrt{\alpha\delta}}e^{\frac{2i}{\hbar}(u+\frac{\beta}{\alpha}v)v} = \frac{2}{\sqrt{\alpha\delta}}e^{\frac{2i}{\hbar\alpha\delta}(\alpha u+\beta v)\delta v} \tag{4.24}$$

のように書かれる．特に $\alpha\delta=1$ で $\beta=0$ ならば

$$2e^{\frac{2i}{\hbar}uv} * 2e^{\frac{2i}{\hbar}\alpha u(\gamma u+\delta v)} = 2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$$

である．

要約すると，左からの積 $2e^{\frac{i}{\hbar}2uv}*$ が定義できない真空はワイル表示で

$$2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2-2iuv)},\ 2e^{\frac{1}{\hbar}(bv^2-2iuv)}$$

の場合であり，これらは (u,v) に関する正規順序表示を持たない．このことは

$$2e^{\frac{i}{\hbar}2uv}*2e^{\frac{1}{\hbar}(au^2-2iuv)},\quad 2e^{\frac{i}{\hbar}2uv}*2e^{\frac{1}{\hbar}(bv^2-2iuv)}$$

は見掛け上発散しているのだはなく，どの表示でも発散することを意味している．

しかし，上の計算で分かるように積の発散する真空というのは互いにかなり離れた所に位置している．前の方で与えた積公式から次のことが分かっている：

補題 4.9 ϖ_{00} に近い真空は

$$2\sqrt{1+4rt}e^{\frac{r}{\hbar}u^2}*e^{\frac{2i}{\hbar}uv}*e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$$

の形に書かれ，次の積公式が成立する:

$$2\sqrt{1+4rt}\,e^{\frac{r}{\hbar}u^2}*\varpi_{00}*e^{\frac{t}{\hbar}v^2}*\varpi_{00}=2\sqrt{1+4rt}\,e^{\frac{r}{\hbar}u^2}*\varpi_{00}$$

$$\varpi_{00}*2\sqrt{1+4rt}\,e^{\frac{r}{\hbar}u^2}*\varpi_{00}*e^{\frac{t}{\hbar}v^2}=2\sqrt{1+4rt}\,\varpi_{00}*e^{\frac{t}{\hbar}v^2}.$$

上の考察から，$\varpi_{00}=2e^{\frac{i}{\hbar}2uv}*$ に対してはワイル順序表示と（u,v に関する）正規順序表示の両方を持つ真空の全体を $\mathcal{V}_{(u,v)}$ とすると，$\varpi_{00}*\mathcal{V}_{(u,v)}$ が定義される．積を作った結果は再び真空のスカラー倍となる．

この考察から**真空全体は局所ブール(Boole)代数とでも呼べるような代数構造を持っている**ことが分かる．これについてはかなり哲学的問題が含まれるので，別の所で述べることにして，ここではふれないことにする．

読者はそろそろこのような面倒臭い計算ばかりの数学に嫌気がさしているのではないかと思うので，すこし弁明をしておこう．注意してほしいのは，物理的な用語を使いはしたが我々は拡張されたワイル代数から一歩も外に出ていないということである．つまり，すべてを計算の中でこなしてきており，物

理的直観を全く入れていないのである．その意味で我々は厳密な数学の立場に立っているのである．我々が展開して来たものを「物理理論だ」と言いはるつもりは全くないのであるが，にも拘らず，物理がワイル代数を使っている限り，我々がここで述べたような奇妙なことがらを避けて通るわけにはいかないのだと主張したいのである．逆に言えば，このようなことに答えない物理はやはり数学的には怪しげなものに見えてしまうということなのである．

この部分を強調して言えば，我々は物理によって立っているのではなく，数学によって立っているのだから，これは「物理におけるブルバキズム」とでも呼べるかもしれない．前の方ででブルバキを散々批判しておいていまさら何を言うかと思う人も居るとは思うが，現代の理論物理にはブルバキズムは必要だと思えるのである．そうしないと，小数の権威によりかかったものだけが覇を唱えて，大衆化された理論物理が出現しにくくなってしまうと思うのである．こうなってしまっては物理学の堕落である．

第5章

指数関数の積公式

正規順序表示，つまり ΨDO-積公式で $*$-指数関数を書いてみると式(3.35), 式 (3.40)及び定理3.2 が成立していた．これを受けて，$\alpha\delta-\beta\gamma=1$ で正規順序表示で $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)} = ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}(\alpha u+\beta v)*(\gamma u+\delta v)}$ を書いたものを**極地元** (polar element) と呼んでいた．

この章では正規順序表示，ワイル順序表示を総動員して $e_*^{\frac{1}{\hbar}2\text{ 次式}}$ の形の元が生成する “群” を考える．結果として極地元 ε_{00} の意外な性質が浮き彫りになるであろう．

5.1 極地元の性質と積公式

まず，少し奇妙なことを述べよう：

奇妙な事柄 7 まず(3.41)式を思い出すと，$c^2-ab=1$ のもとでは極地元 $e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+c(u*v+v*u))}$ は a,b,c に無関係に $\sqrt{-1}e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ と書かれる[注1]．すると $c=\pm1,\ ab=0$ も条件を満たすから

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=\sqrt{-1}e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}=e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv} \tag{5.1}$$

と書かれる，ところが $(0,0,1)$ と $(0,0,-1)$ とは空間 $\{(a,b,c);c^2-ab=1\}$ の中で連続的に結べるから上の式の $\sqrt{-1}=\pm i$ の部分の不定性はどちらか一

[注1] $u*v+v*u=2uv=2u\circ v+\hbar i$ に注意して計算すること．

方に決められそうに見える．

一方，指数法則によれば

$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}=-ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ であるが，(3.36)により，$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}=e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}u*v}$ である．これに従えば，$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=-e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv}$ である．式(5.1)の両辺に $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ をかけた式もまた当然成立するわけだから，

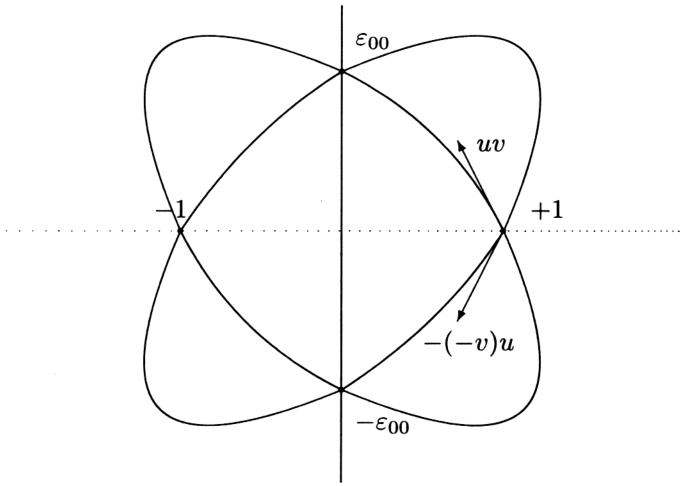
$$-1=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}*e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv}*e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=1$$

となる．

しかし，(5.1)式の一番目の $=$ と二番目の $=$ では等号の意味がかなり違っているとも考えられる．一番目の $=$ は定理 3.2 によるものであり，二番目の $=$ は (u,v) と $(-v,u)$ を区別しないで $-uv=(-v)u$ と思ったときの等式であるとも思える．

この混乱を救うには，$\varepsilon_{00}=-\varepsilon_{00}$ と思ってしまうのも 1 つの方法のように思えるが，指数法則を優先させると，$e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}uv}=-1$ なのだから，ε_{00} と $-\varepsilon_{00}$ は区別して，$\varepsilon_{00}^{-1}=-\varepsilon_{00}$ と考えたくもなるであろう．

$uv\neq-(-v)u$ と考え，$\varepsilon_{00}\neq-\varepsilon_{00}$ としたときの図は下のようになる：



すると，$\pm\varepsilon_{00}$ は普通の場所とは違った，特異点として扱わねばならない点になる．これを嫌って，この図で点線で折り返すと $-uv=(-v)u$ と思ったことになり，ε_{00} と $-\varepsilon_{00}$ が同一視されるが 1 と -1 は区別されている．一方実線で折り返すと $e_*^{\frac{t}{\hbar}uv}$ と $-e_*^{\frac{t}{\hbar}(-v)u}$ とを同一視し ε_{00} と $-\varepsilon_{00}$ を区別したことになるが，1 と -1 が同一視される．

この同一視の両方を採用すると，周期が半分になるので $\pm1,\pm\varepsilon_{00}$ はそれぞれ一塊になり，$(\pm\varepsilon_{00})*(\pm\varepsilon_{00})=(\pm1)$ なので，あらためて $(\pm1)=1$, $(\pm\varepsilon_{00})=-1$ と置いた方が便利な元となる．

これらのことと，uv の離散描像では ε_{00} は $\pm i$ を動く不定元であったことを考え合わせると，ε_{00} は 2 価の元と考えるのが適切であるように思えるのである．しかし，このような元の概念は普通の集合論には無いのだから，数学の中にこのようなものを採り入れるのはかなり注意深く行わないといけない．どのように考えるべきかはっきりしないが，しばらくは $\pm\varepsilon_{00}$ のように書いておこう．

5.1.1 極地元の真空表現

ε_{00} はワイル順序表示では表示できない元だが，正規順序表示と式(3.32)，補題 3.9 を用いると，真空表現 $f(u)*\varpi_{00}\to\varepsilon_{00}*f(u)*\varpi_{00}$ が計算できる：

$$\varepsilon_{00}*u^m*\varpi_{00}=(-1)^m u^m*\varepsilon_{00}*\varpi_{00}=(-1)^m iu^m*\varpi_{00}$$

となり，ε_{00} の真空表現の固有値は $\pm i$ であることが分かる．これは奇妙な事柄 3 で述べたことと辻褄があっている．同時に $-\varepsilon_{00}$ の真空表現の固有値も $\mp i$ であるから，ε_{00} は値を二つ持っている元と考えておくほうが良いであろう．

同様に共役真空を使って $f(v)*\bar{\varpi}_{00}\to\varepsilon_{00}*f(v)*\bar{\varpi}_{00}$ も計算できる：$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=-ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}v*u}$, $u*e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}=0$ より，

$$\varepsilon_{00}*v^m*\bar{\varpi}_{00}=(-1)^m v^m*\varepsilon_{00}*\bar{\varpi}_{00}=-(-1)^m iv^m*\bar{\varpi}_{00}$$

となる．

5.2　$*$-指数関数どうしの積の公式

前節のモイヤル積公式(ワイル順序表示)で発散していた部分，極地元などを組織的に調べるために $*$-指数関数どうしの積の公式を確立しよう．

この節では(5.3)式から出発して後の方で使われる積の公式を作る．式 (5.3) 及び (5.6)を無限小の積と見れば $c\exp$(2 次式) どうしは $*$-積をとってもまた同じ形に書かれるはずである．まずこれを計算で求めよう．

5.2.1　常微分方程式系の行列表示

容易に分かることだが 2 次形式の全体は交換子積 $[\ ,\ ]_*$ で閉じておりリー代数になっている．つまり，

$X = \frac{1}{\hbar}u^2, Y = \frac{1}{\hbar}v^2, H = \frac{i}{\hbar}uv$ はリー代数を生成している．

$$[\frac{i}{2\hbar}uv, \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}u^2] = -\frac{1}{\hbar\sqrt{8}}u^2, \quad [\frac{i}{2\hbar}uv, \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}v^2] = \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}v^2,$$
$$[\frac{1}{\hbar\sqrt{8}}u^2, \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}v^2] = -\frac{i}{2\hbar}uv,$$

であるから，これは $SL(2,\mathbb{C})$ のリー環をなしている[注2]．

$SL(2,\mathbb{C})$ は複素3次元多様体であり，その単位元の所での接空間が X, Y, H で張られるリー代数である．X, Y, H は多項式の空間 $\mathbb{C}[u,v]$ の中で結合代数を生成する．これは $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の展開環である．

カシミール(Casimir)元 $C = H^2 + (X{*}Y + Y{*}X)$ は普遍展開環の中の中心(center)に属する元だが，これは今の場合

$$C = \Big(\frac{i}{2\hbar}uv\Big)_*^2 + \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}u^2 * \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}v^2 + \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}v^2 * \frac{1}{\hbar\sqrt{8}}u^2$$

であり，計算すると

$$\begin{aligned} 8\hbar^2 C &= u^2{*}v^2 + v^2{*}u^2 - 2(u{*}v + \frac{\hbar i}{2})^2 \\ &= u^2{*}v^2 + v^2{*}u^2 - 2u{*}v{*}u{*}v - 2\hbar i u{*}v + \frac{\hbar^2}{2} \end{aligned}$$

注2 $\mathbb{R}$ でも閉じており，$SL(2,\mathbb{R})$ のリー環になっている．また，$\{iX, iY, H\}$ も $\mathbb{R}$ で閉じていて $SU(1,1)$ のリー環になっている．

となり，これより $C=-\frac{3}{16}$ であることが分かる．つまり，この場合の展開環は普遍展開環ではなく，$C=-\frac{3}{16}$ という条件も満たしていることが分かる．

しかし，式が似ているからと言って，

$$\left(\frac{i}{2\hbar}uv\right)^2+\frac{1}{\hbar\sqrt{8}}u^2\frac{1}{\hbar\sqrt{8}}v^2+\frac{1}{\hbar\sqrt{8}}v^2\frac{1}{\hbar\sqrt{8}}u^2=-\frac{3}{16}$$

といった関係式があると誤解しては困る．上の式の左辺は計算すれば恒等的に 0 となるだけである．

ΨDO-積公式で $*$-指数関数を計算したとき，解の形を指定して解くという方法を示したが，この方法は**リー群論的方法**と呼ばれて，しばしば登場するから詳しく述べておこう．その前に少し呼び方の約束をする：指数関数

$$s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}$$

に対して，$(a(t),b(t),c(t))$ をこの指数関数の**位相**(phaze)，$s(t)$ を**振幅**(amplitude)と呼ぶ．

まず，モイヤル積公式の場合：任意の点 $(a,b,c;s)\in\mathbb{C}^4$ に対して点 $se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ を始点とする曲線

$$s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}$$

を考えよう．この曲線の接ベクトルは次のように与えられる：

$$\left(\frac{1}{\hbar}((a'u^2+b'v^2+2c'uv)s+s'\right)e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

この接ベクトルを $e^{\frac{t}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)}$ を $*$-積することで実現できるだろうか? と考えてみる．つまり，上の式が次の計算

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}e^{\frac{t}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)}*se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} \tag{5.2}$$

で出て来るかどうかを考える．(5.2)の計算は次のようになる：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)*se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\
&\quad=\frac{1}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\
&\quad+\frac{2i}{\hbar}\{(b'v+c'u)(au+cv)-(a'u+c'v)(bv+cu)\}se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\
&\quad-\frac{1}{2\hbar}\{b'(\hbar a+2(au+cv)^2)-2c'(\hbar c+2(au+cv)(bv+cu))\\
&\qquad\qquad+a'(\hbar b+2(bv+cu)^2)\}se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}.
\end{aligned}$$

これは $se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ に左から掛けられるものを次のように行列表示すると考えやすい：

$$\frac{1}{\hbar}(a',b',c')\begin{bmatrix} -(c+i)^2, & -b^2, & -b(c+i), & -\frac{b}{2} \\ -a^2, & -(c-i)^2, & -a(c-i), & -\frac{a}{2} \\ 2a(c+i), & 2b(c-i), & 1+ab+c^2, & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ 2uv \\ \hbar \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

この行列を $M(a,b,c;s)$ と表し，さらに最初の 3 列からなる部分行列を $M(a,b,c)$ と表す．

この行列の特徴は任意の (a,b,c) に対し

$$(a,b,c)M(\tau a,\tau b,\tau c)=(1+(c^2-ab)\tau^2)(a,b,c), \tag{5.4}$$

となることで，位置ベクトルがいつも固有ベクトルになっている．さらに

$$\det M(a,b,c)=(c^2-ab+1)^3 \tag{5.5}$$

が分かる．つまり，$V_\mu=\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3;\ c^2-ab+1=0\}$ 上で階数が 1 となるがそれ以外のところでは正則行列である．これは，$(a,b,c)\in\mathbb{C}^3-V_\mu$ においては**位相部分のどの方向の変化も** $e^{\frac{t}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)}$ **を左から $*$-積することで実現できる**と言っているのである．

また，c,c' を $ci,c'i$ に置き換えれば，上の行列の成分に虚数単位が入らないようにできる．つまり $\mathbb{R}^3$ を $(a,b,c)\to(a,b,ci)$ の形で $\mathbb{C}^3$ の中に埋め込んで考えれば話は実数に制限することが出来る．同様のことは，a,b,c,a',b',c' をすべて純虚数 ia,ib,ic,ia',ib',ic' に置き換えてもできる．

$c^2-ab+1=0$ となる所では

$$au^2+bv^2+2cuv=2i(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v),\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

と因数分解でき，さらにそのときの不定性を利用して $[\alpha u+\beta v,\gamma u+\delta v]=-\hbar i$ となるようにできる．つまり，$u'=\alpha u+\beta v$, $v'=\gamma u+\delta v$ は量子正準共役対をなす．したがって，式(1.19)が使え，これより次のことが分かる：

$$(\gamma u+\delta v)_*^2 * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=0,\ (\alpha u+\beta v)*(\gamma u+\delta v)*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=0.$$

第二の式は式(5.4)に対応しており，また，第一の式からは

$$(\gamma^2, \delta^2, \gamma\delta)M(a,b,c) = 0, \qquad c^2 - ab + 1 = 0$$

が得られる．これより，部分行列 $M(a,b,c)$ は $c^2 - ab + 1 = 0$ の所では階数が 1 であることが分かる．このような点でも $M(a,b,c;s)$ の階数は 2 であることを見ておこう．(1.19)があるから，

$$\begin{aligned}\big((\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v)\big) * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} \\ =&\Big((\alpha u + \beta v) * (\gamma u + \delta v) + \frac{\hbar i}{2}\Big) * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} \\ =&\frac{\hbar i}{2} e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\end{aligned}$$

である．位相方向は変化せず，振幅方向のみ変化する．これは，$c^2-ab+1=0$ となる点 $(a,b,c;s)$ では無限小指数関数を左から $*$-積することで実現できる位相方向は 1 次元しかないが，**振幅のみ変化するように無限小指数関数を左から $*$-積することができる**ことを意味する．

$2e^{\frac{2i}{\hbar}(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)}$ とか $2e^{-\frac{2i}{\hbar}(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)}$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の元で変数変換すれば前の方で真空と呼んでいたものと同じ形になるので，やはり**真空**，**共役真空**と呼ばれるが，ここで注意しておきたいのは，

$$[\alpha u + \beta v,\ \gamma u + \delta v] \neq [\gamma u + \delta v,\ \alpha u + \beta v]$$

なので，真空の表示の時には $(\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v)$ と $(\gamma u + \delta v)(\alpha u + \beta v)$ とは区別しておかないと真空と共役真空を混同するおそれがあるということである．

5.2.2 ΨD-積公式の場合

前節と同じことを今度は正規順序表示でやってみよう．ΨDO-積公式では

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'u{\circ}v) * se_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)} \\ &= \{\frac{1}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'u{\circ}v) + \frac{i}{\hbar}(2b'v+2c'u){\circ}(2au+2cv) \\ &\qquad + \frac{-1}{\hbar}\frac{1}{2}(2b')\big((2au+2cv)^2+2a\hbar\big)\}{\circ}se_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}\end{aligned}$$

である．これも $se_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}$ に左から掛けられるものを行列を使って表すと

$$\frac{1}{\hbar}(a',b',c')\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ -4a^2, & 1+4ci-4c^2, & 2ai-4ac, & -2a \\ 4ai, & 0, & 1+2ci, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ 2u\circ v \\ \hbar \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

上の行列を $N(a,b,c;s)$ と書き，最初の 3 列の部分行列を $N(a,b,c)$ と書くことにすると，$\det N(a,b,c)=(1+2ci)^3$ である，つまり $2c=i$ の所でのみ零である．

行列 $N(a,b,c)$ も c,c' を $ci,c'i$ に置き換えれば，行列の成分に虚数単位が入らないようにできる．同様のことは，a,b,c,a',b',c' をすべて純虚数 ia, ib, ic, ia', ib', ic' に置き換えてもできる．

$\det N(a,b,c)=(1+2ci)^3=0$ はどのような所であろうか？

$$e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+iu\circ v)}=e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}au^2}*e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}iu\circ v}*e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}bv^2}$$

であり，$e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}iu\circ v}$ は式(3.38)の所でやったように，真空 ϖ_{00} である．従って，この場所はワイル順序表示では $c^2-ab+1=0$ と書いていた場所に相当，つまり真空と呼んでいた場所になっている．

これは，真空の場所以外では $e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)}$ の無限小の作用で位相部分が複素 3 次元どの方向にも動き出せる．つまり $e_*^{au^2+bv^2+2cuv}{}_*$ の無限小作用で**位相部分はどの方向にも動ける**（動き出せる自由度が 3）と言っているのである．

$\varepsilon_{00}=\sqrt{-1}e^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ であったが，ここは特異点でも何でもないことに注目してもらいたい．前の方で $\varepsilon_{00}=-\varepsilon_{00}$ と扱って良いかどうか分からないと述べたが，その理由がここにある．$\varepsilon_{00}\neq-\varepsilon_{00}$, $1\neq-1$ の両方が成り立つように，区別できるものを全部区別するという態度をとると，ε_{00} は特異点のように扱わなければならなかったのだが，ここでは ε_{00} は特異点のようには見えないのである．

上の計算では 2 次式を左から掛けた計算であったが，同様に 2 次式を右か

ら掛けたものも計算できる．計算公式を得るには，対合的反自己同型 ι;

$$\iota(u) = u, \quad \iota(v) = v, \quad \iota(i) = -i$$

を使って全てを反転すればよい．従って結果は同じようなものになる．

5.2.3　積の公式

2 次の指数関数に対して $*$-積の拡張を 2.1.1 節の考えで行おう．この節での計算は全てワイル順序表示で行う．したがって積公式はモイヤル積公式を使っている．

$y = (a', b', c')$ を任意に固定し，各点 $x = (a, b, c; s)$ でベクトル

$$Y(a, b, c; s) = (a', b', c')M(a, b, c; s)$$

を考える．

これより $*$-積の指数関数 $e_*^{t(a'u^2+b'v^2+2c'uv)}$ は次の常微分方程式系の解として与えられることが分かる：

$$\frac{d}{dt}(a(t), b(t), c(t); s(t)) = (a', b', c')M(a(t), b(t), c(t); s(t)). \tag{5.7}$$

まず次のことに注意しよう：

補題 5.1　この常微分方程式系の解は初期条件について一意的である．解の存在範囲は初期点に依存するが空集合にはならない．

$(a', b', c') = (1, 0, 0)$ の場合

$(a', b', c') = (1, 0, 0)$ の場合，常微分方程式系は

$$\frac{d}{dt}(a(t), b(t), c(t); s(t)) = (-(c(t)+i)^2, -b(t)^2, -b(t)(c(t)+i); -\frac{1}{2}b(t)s(t)) \tag{5.8}$$

で与えられる．初期条件が $(a(0), b(0), c(0); s(0)) = (a, 0, c; 1)$ のときには解は簡単で

$$(a(t), b(t), c(t); 1) = (-(c+i)^2t + a, 0, c; 1)$$

となる．特に $\exp_* t(1, 0, 0) = (t, 0, 0)$ であり，また

$$(t,0,0;1)*(a,0,c;1)=(-(c+i)^2t+a,0,c;1)$$

であるから，2.1.1 節での積の定義にしたがって，積の公式

$$e^{\frac{t}{\hbar}u^2}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+2cuv)}=e^{\frac{1}{\hbar}((a-(c+i)^2t)u^2+2cuv)}$$

も得られる．

初期条件 $(a,b,c;1)$, $b\neq 0$ のときは，$b(t)=\frac{b}{1+bt}$, $c'(t)=-\frac{b}{1+bt}(c(t)+i)$ であり，これより $c(t)=\frac{c+i}{1+bt}-i$ であるから，次が分かる：

$$(t,0,0)*(a,b,c)=\Big(-\frac{(c+i)^2t}{1+bt}+a,\ \frac{b}{1+bt},\ \frac{c+i}{1+bt}-i\Big). \tag{5.9}$$

微分方程式

$$\frac{d}{dt}s(t)=-(\frac{1}{2}\frac{b}{1+bt})s(t),\quad s(0)=1$$

を解いて

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=\frac{1}{\sqrt{1+bt}}e^{\frac{1}{\hbar}(-(\frac{(c+i)^2t}{1+bt}-a)u^2+\frac{b}{1+bt}v^2+2(\frac{c+i}{1+bt}-i)uv)}$$

が分かるから，これを書き直して次の公式が得られる：

$$\begin{aligned}&e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\&\quad=\frac{1}{\sqrt{1+bt}}e^{\frac{1}{\hbar(1+bt)}\{(a+(ab-c^2-2ci+1)t)u^2+bv^2+2(c-ibt)uv\}}\end{aligned} \tag{5.10}$$

これは，$b=0$ の場合を含んでいる．$\sqrt{1+bt}$ の不定性には注意する必要があるが，$t=0$ で 1 であるべきだから bt が十分小さければ自然に決められる．

右辺の 2 次式の判別式を D_3 とすると，これは

$$D_3=\frac{c^2-ab+1}{1+bt}-1=\frac{c^2-ab-bt}{1+bt} \tag{5.11}$$

である．これに調子を合わせて c^2-ab+1 を D_2+1 と書くことにすると，(5.10)式は次のようになる．

$$\begin{aligned}&e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2}*\sqrt{D_2+1}e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\&\quad=\sqrt{D_3+1}e^{\frac{1}{\hbar(1+bt)}\{(a+(ab-c^2-2ci+1)t)u^2+bv^2+2(c-ibt)uv\}}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

また，$e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2} = e^{\frac{t}{\hbar}u^2}$ に注意してほしい．

$bt+1=0$ の場合は(5.12)の右辺は発散するのだが，u, v に関する ΨDO-積公式を使ってならばこれらの積は定義される．例えば，

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2} * e_*^{-\frac{1}{\hbar t}v^2} = e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(tu^2 - \frac{1}{t}v^2)}$$

である．

もう少し詳しく $e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2} * e_*^{-\frac{1}{\hbar t}v^2}$ を計算してみよう：(5.10)式を使えば

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2} * e_*^{-\frac{s}{\hbar}v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-st}} e^{\frac{1}{\hbar(1-st)}\{tu^2 - sv^2 - 2istuv\}}$$

である．$st=1$ の時にはワイル順序表示では発散しているので，極地元のように見えるかもしれないが，後で分かるように，$\pm\varepsilon_{00} * e_*^{(\alpha u+\beta v)^2}$，$\alpha\beta \neq 0$ のように書かれる元なのである．

真空との積

式(5.10)で $c^2 - ab + 1 = 0$ の場合が真空であるが，この場合 $D_2 + 1 = 0$ であり，(5.11), (5.12)式より $D_3 + 1 = (D_2+1)\frac{1}{1+bt}$ だから，$1+bt \neq 0$ である限り $D_3 + 1 = 0$ であり，右辺も真空のスカラー倍になることが分かる．しかし，真空が指定する正準共役対は変化する．(右辺の位相部分を因数分解してみよ.)

$$au^2 + bv^2 + 2cuv = 2i(\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

と因数分解して，$u' = \alpha u + \beta v$, $v' = \gamma u + \delta v$ と置き，逆に解いて $u = \delta u' - \beta v'$, $v = -\gamma u' + \alpha v'$ に対して式(5.10)を使うと，$c^2 - ab + 1 = 0$ だから

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(\delta u - \beta v)^2} * \varpi_{00} = \frac{1}{\sqrt{1+bt}} e^{\frac{1}{\hbar(1+bt)}\{(a+2(1-ci)t)u^2 + bv^2 + 2(c-ibt)uv\}} \tag{5.13}$$

という公式も得られる．

分解公式への応用

次の補題は式(5.10)と交換則より得られる：

補題 5.2 $\sqrt{1-\alpha\beta}\,e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2)}$ のように書かれる任意の元に対して次の式が成り立つ：

$$e^{-\frac{1}{\hbar}\alpha u^2}*\sqrt{1-\alpha\beta}\,e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2)}=e^{\frac{\beta}{\hbar(1-\alpha\beta)}(v+\alpha i u)^2}=e^{-\frac{\alpha}{2\hbar}u^2}*e^{\frac{\beta}{\hbar(1-\alpha\beta)}v^2}*e^{\frac{\alpha}{2\hbar}u^2}.$$

証明　最初の等式は式(5.10)から得られ，$e^{t\mathrm{ad}(u^2)}f(u,v)$ を計算すると

$$e^{t\mathrm{ad}(u^2)}e^{\frac{t}{\hbar}v^2}=e^{\frac{1}{\hbar}t(v-riu)^2}$$

が分かるから，式 (3.6)の交換則を使って

$$e^{\frac{r}{2\hbar}u^2}*e^{\frac{t}{\hbar}v^2}=e^{\frac{1}{\hbar}t(v-riu)^2}*e^{\frac{r}{2\hbar}u^2}$$

が分かり，これを代入すれば良い．　□

これは第3章の演習問題1の解答でもある．

Hermite 多項式系への応用

公式 (5.10)に於いて $t=-\hbar$, $a=0$, $b=0$ と置けば

$$e^{-u^2}*e^{\frac{1}{\hbar}(2cuv)}=e^{(c+i)^2u^2+\frac{1}{\hbar}(2cuv)}$$

であるが，エルミート(Hermite)多項式系 $H_n(u)$ は

$$H_n(u)e^{-u^2}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}^n}\frac{d^n}{du^n}e^{-u^2}$$

で定義されるから，左辺をモイヤル積公式で計算して整頓すると

$$\sum\frac{i^n}{n!}(\sqrt{2})^n(cu)^nH_n(u)=e^{(c^2+2ic)u^2}$$

という公式が得られる．$t=i\sqrt{2}\,c$ と置き直すと，

$$\sum\frac{1}{n!}(tu)^nH_n(u)=e^{(\sqrt{2}\,t-\frac{1}{2}t^2)u^2}$$

となる．これはエルミート多項式系の母関数表示

$$\sum\frac{1}{n!}\tau^nH_n(u)=e^{\sqrt{2}\,\tau u-\frac{1}{2}\tau^2}\tag{5.14}$$

で $\tau=tu$ としたものである．

$(a',b',c')=(0,1,0)$ の場合

$(a',b',c')=(0,1,0)$ の場合は u,v を入れ換え，$\hbar$ を $-\hbar$ にすれば式は全く同様になる．$\exp t(0,1,0)=(0,t,0)$ であり，

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}v^2} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+at}} e^{\frac{1}{\hbar(1+at)}\{au^2+(b+(ab-c^2+2ci+1)t)v^2+2(c+iat)uv\}} \tag{5.15}$$

が得られる．特に

$$e_*^{-\frac{b}{\hbar}v^2} * \sqrt{1-ab}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2)} = e^{\frac{1}{\hbar}a(u-ibv)^2} = e_*^{-\frac{b}{2\hbar}v^2} * e^{\frac{1}{\hbar}au^2} * e_*^{\frac{b}{2\hbar}v^2}$$

である．

あまり，注意してこなかったが，形式的に複素共役 $\iota(u) = u, \iota(v) = v, \iota(i) = -i$ を反自己同型として考え，得られた公式の複素共役を作るとそれでまた別の公式が得られていることが分かる．このようなことはワイル順序表示だからできることである．

$(a', b', c') = (0, 0, 1)$ の場合

$(a', b', c') = (0, 0, 1)$ の場合，常微分方程式系は

$$\frac{d}{dt}(a(t), b(t), c(t); s(t))$$
$$= \big(2a(t)(c(t)+i),\ 2b(t)(c(t)-i),\ 1+a(t)b(t)+c(t)^2;\ c(t)s(t)\big) \tag{5.16}$$

となる．これを解くのは初等微積分の良い演習になるので詳しく述べよう．

初期条件が $(a(0), b(0), c(0); s(t)) = (0, 0, 0; 1)$ の場合はすでに計算してあり，解は

$$(a(t), b(t), c(t); s(t)) = \left(0, 0, \tan t; \frac{1}{\cos t}\right)$$

であるから，

$$\exp_* t(0, 0, 1) = (0, 0, \tan t)$$

となる．つまり，

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}2uv} = \frac{1}{\cos t} e^{(\frac{2}{\hbar}\tan t)uv}$$

である．

初期条件が $(a(0), b(0), c(0)) = (a, b, c)$ のときには，初めの二つの式

$$\frac{d}{dt}a(t) = 2a(t)(c(t)+i), \quad \frac{d}{dt}b(t) = 2b(t)(c(t)-i)$$

から次のように得られる：

$$a(t)=ae^{\int_0^t 2(c(s)+i)ds},\quad b(t)=be^{\int_0^t 2(c(s)-i)ds}.$$

だから，第三の式は次のようになる：

$$\frac{d}{dt}c(t)=1+ab\,e^{4\int_0^t c(s)ds}+c(t)^2,\quad c(0)=c. \tag{5.17}$$

$ab=0,\ c\neq\pm i$ なら，$\tan t_0=c$ なる t_0 が求められるから，$c(t)=\tan(t+t_0)$ である．以下 $b=0, c\neq\pm i$ として式を書くが $a=0$ の場合も同様である：

$$(0,0,\tan t)*(a,0,c)=\left(\frac{a}{\cos^2 t},0,\tan(t+t_0)\right)=(a(1+\tan^2 t),0,\tan(t+t_0)) \tag{5.18}$$

であり，これより

$$(0,0,s)*(a,0,c)=\left(a(1+s^2),\ 0,\ \frac{s+c}{1-sc}\right)$$

となる．

$b=0,\ c=\pm i$ の場合は解の一意性より $c(t)=\pm i$ である．よって，

$$(0,0,\tan t)*(a,0,i)=(4ait,0,i),\quad (0,0,\tan t)*(a,0,-i)=(0,0,-i), \tag{5.19}$$

となる．

$ab\neq 0$ の場合は $x(t)=\int_0^t c(s)ds$ と置けば，(5.17)は次の式と同値になる：

$$x''(t)=1+abe^{4x(t)}+(x'(t))^2,\quad x(0)=0,\ x'(0)=c.$$

初等微積分でやるおなじみのやりかたで，x の方を独立変数と思い $c(t)=p(x(t))$ と置くと[注3]，$c=x'$ であるから，$x''(t)=p\frac{dp}{dx}$ が得られ，これより p^2 に関する微分方程式

$$\frac{1}{2}\frac{dp^2}{dx}-p^2=1+abe^{4x},\quad p(0)=c$$

注3 この置き換えは昔はルジャンドル変換と呼ばれていた．

が得られるから，これを解いて

$$p^2(x) = ab\,e^{4x} + (c^2-ab+1)e^{2x} - 1$$

となる．$x'(t) = p(x(t))$ だったから，

$$\int_0^x \frac{1}{(abe^{4\tau} + (c^2-ab+1)e^{2\tau} - 1)^{1/2}} d\tau = t \tag{5.20}$$

であり，(5.20)の逆関数を知る必要があるが，この積分は a, b, c に関して代数的になっているということは微積分学で教わったはずである．

変数 ξ を次のように置く：

$$(ab\,e^{4x} + (c^2-ab+1)e^{2x} - 1)^{1/2} = \xi - \sqrt{ab}\,e^{2x}$$

すると，

$$e^{2x} = \frac{\xi^2+1}{2\sqrt{ab}\,\xi+c^2-ab+1}, \qquad dx = \frac{\sqrt{ab}\xi^2 + (c^2-ab+1)\xi - \sqrt{ab}}{(2\sqrt{ab}\,\xi+c^2-ab+1)(\xi^2+1)}\,d\xi$$

が得られ，これより

$$\int \frac{1}{(ab\,e^{4x} + (c^2-ab+1)e^{2x} - 1)^{1/2}} dx = \int \frac{1}{\xi^2+1} d\xi = \arctan\xi$$

となる．(5.20)より，次のようになる：

$$\xi = \tan(t+t_0) = (ab\,e^{4x} + (c^2-ab+1)e^{2x} - 1)^{1/2} + \sqrt{ab}\,e^{2x}.$$

ただし，$\tan t_0 = c+\sqrt{ab}$ である．

$$s = \tan t,\ \xi_0 = \tan t_0 = c + \sqrt{ab},$$

と置くと

$$\xi = \tan(t+t_0) = \frac{s+c+\sqrt{ab}}{1-s(c+\sqrt{ab})}$$

であり，これより

$$e^{2x} = \frac{1}{\cos(t+t_0)(\sqrt{ab}\sin(t+t_0) + (c^2-ab+1)\cos(t+t_0))} \tag{5.21}$$

となり，したがって

$$e^{2x} = \frac{1+s^2}{1-2cs+(c^2-ab)s^2} \tag{5.22}$$

となる．これより次が得られる：

$$a(t) = ae^{it}e^{2x(t)}, \qquad b(t) = be^{-it}e^{2x(t)}. \tag{5.23}$$

さらにこれより

$$c(t) = x'(t) = \frac{\sqrt{ab}(\tan^2(t+t_0)-1)+(c^2-ab+1)\tan(t+t_0)}{2\sqrt{ab}\tan(t+t_0)+c^2-ab+1} \tag{5.24}$$

が分かる．$s=\tan t$ と置いて s を使って，もう少し注意深く計算を進めると，

$$c(t) = \frac{c+(1-c^2+ab)s-cs^2}{1-2cs+(c^2-ab)s^2} = \frac{(c+s)(1-cs)+abs}{(1-cs)^2-abs^2} \tag{5.25}$$

であることが分かる．

$s=\tan t$ だったから，(5.25)式と等式 $e^{2it}=\frac{1+is}{1-is}$ を使って，

$$a(t) = a\frac{(1+is)^2}{(1-cs)^2-abs^2}, \qquad b(t) = b\frac{(1-is)^2}{(1-cs)^2-abs^2} \tag{5.26}$$

が分かる．

これより

$$(a(t),b(t),c(t)) = \frac{1}{1-2cs+(c^2-ab)s^2}\big(a(1+is)^2,\ b(1-is)^2,\ c-(c^2-ab-1)s-cs^2\big)$$

である．

振幅部分の $s(t)$ を求めるには微分方程式 $s'(t)=c(t)s(t)$ を初期値 $s(0)=1$ で解けばよい．$x(t)=\int_0^t c(\tau)d\tau$ だから $s(t)=e^{x(t)}$ が得られ，これより

$$s(t) = \frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1-2cs+(c^2-ab)s^2}}$$

となる．

$e_*^{\frac{t}{\hbar}2uv} = \sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2uv}$，に注意してやると，式 (5.25)と式 (5.26)から $P=1-2cs+(c^2-ab)s^2$ として

$$\begin{aligned}&e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\ &=\frac{1}{\sqrt{P}}e^{\frac{1}{\hbar P}(a(1+is)^2u^2+b(1-is)^2v^2+(c-(c^2-ab-1)s-cs^2)2uv)}\end{aligned} \tag{5.27}$$

が分かる．したがって，$P\neq 0$ ならば $*$-積は定義できる．

この場合，振幅 $\frac{1}{\sqrt{P}}$ の根号の符号の不定性に注意しないといけないが，$s=0$ で $\sqrt{1}=1$ としておけば，s が十分小さいときには問題ない．

上式の右辺の 2 次式の判別式 D の計算の為には次の等式が便利である：

$$\bigl(1-2cs+(c^2-ab)s^2\bigr)^2+\bigl(c-(c^2-ab-1)s-cs^2\bigr)^2-ab(1+is)^2(1-is)^2$$
$$=(c^2-ab+1)(1+s^2)\bigl((c^2-ab)s^2-2cs+1\bigr). \tag{5.28}$$

$D_1+1=1+s^2$, $D_2+1=c^2-ab+1$ とすると，(5.27)式は次のように書かれる：

$$\Bigl(\sqrt{D_1+1}\ e^{\frac{s}{\hbar}2uv}\Bigr)*\Bigl(\sqrt{D_2+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\Bigr)$$
$$=\sqrt{D_3+1}\,e^{\frac{1}{\hbar P}(a(1+is)^2u^2+b(1-is)^2v^2+(c-(c^2-ab-1)s-cs^2)2uv)}$$

となる．但し D_3 は 2 次形式

$$\frac{1}{1-2cs+(c^2-ab)s^2}\bigl(a(1+is)^2u^2+b(1-is)^2v^2+(c-(c^2-ab-1)s-cs^2)2uv\bigr)$$

の判別式である．

指数関数の一般の積公式

命題 1.3 を思いだすと，これまでに得られた積公式から，2 次形式の指数関数の一般の積公式が得られる．そのために少し記号を用意しよう．

2 次形式 $Q=au^2+bv^2+2cuv$ の判別式 $D=c^2-ab$ を $D(Q)$ とする．さらに，対称行列を使って

$$au^2+bv^2+2cuv=(u,v)\ \tilde{Q}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\ \text{とし，さらに}\ \ iJ=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}$$

と表しておく．$D(Q)=-\det\tilde{Q}$, および任意の $A\in SL(2;\mathbb{C})$ に対して ${}^tA(iJ)A=iJ$, $\det(A\tilde{Q}\,{}^tA)=\det(\tilde{Q})$ であることに注意しておく．

定理 5.1 積 $e^{\frac{1}{\hbar}Q_1}*e^{\frac{1}{\hbar}Q_2}$ はワイル順序表示では

$$P=(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)-D(Q_1+Q_2) \tag{5.29}$$

が $\neq 0$ の場合，かつそのときに限り $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元として定義でき，次の形に

書かれる：

$$\sqrt{D(Q_1)+1}e^{\frac{1}{\hbar}Q_1} * \sqrt{D(Q_2)+1}e^{\frac{1}{\hbar}Q_2} = \sqrt{D(Q_3)+1}e^{\frac{1}{\hbar}Q_3}.$$

但し，Q_3 は，$Q_3=\frac{1}{P}Q_3'$ と書かれ

$$\tilde{Q}_3' = \tilde{Q}_1+\tilde{Q}_2-D(Q_2)\tilde{Q}_1-D(Q_1)\tilde{Q}_2-\tilde{Q}_1(iJ)\tilde{Q}_2+\tilde{Q}_2(iJ)\tilde{Q}_1 \quad (5.30)$$

である．しかも，

$$D(Q_3)+1=\frac{1}{P}(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1) \quad (5.31)$$

である．しかし，振幅に現れる $\frac{1}{\sqrt{P}}$ の $\pm$ の不定性は全体にわたって連続となるようには処理できない．

証明　まず，任意の $A\in SL(2;\mathbb{C})$ に対して $(u',v')=(u,v)A$ なる置き換えは $*$-積の同型対応になっていることに注目すると，下の二つの積公式だけですべての場合が扱われていることが分かる．

$$e^{\frac{t}{\hbar}u^2} * \sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},$$
$$\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * \sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}.$$

ここでは P は $1+bt$, $1-2cs+(c^2-ab)s^2$ であることを思い出しておこう．P の形を計算だけで求めるのは面倒だが，$SL(2;\mathbb{C})$ で不変な式であることから

$$P=(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)-D(Q_1+Q_2)$$

であることが分かる．$P\neq 0$ の場合に上の $*$-積が定義でき，定義できないのは $P=0$ の場合のみであるが上の二つの場合から分かる．[注4]

一方，$\tilde{Q}_3'$ のほうも，積の公式が $(u',v')=(u,v)A$ なる置き換えは $*$-積の同型対応になっているべきだということから，(5.30)の形であることが分かる．確認の計算は ${}^t\!A(iJ)A=iJ$ だから，

$$A\tilde{Q}_3'{}^t\!A = A\tilde{Q}_1{}^t\!A + A\tilde{Q}_2{}^t\!A - D(AQ_2{}^t\!A)A\tilde{Q}_1{}^t\!A - D(AQ_1{}^t\!A)A\tilde{Q}_2{}^t\!A$$
$$-A\tilde{Q}_1{}^t\!A(iJ)A\tilde{Q}_2{}^t\!A + A\tilde{Q}_2{}^t\!A(iJ)A\tilde{Q}_1{}^t\!A$$

となることである．　□

特に，次のことも分かる：

$$D(Q_3') = ((D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)+P)\,P. \quad (5.32)$$

注4　この場合でも u,v に関する正規順序表示では定義できていることがすぐに分かる．

上の積公式が $\mathbb{R}$ で閉じるように作り替えておこう．これまでの計算結果を良く見ると，$u^2, v^2, 2iuv$ の係数というように見ると係数を実数に制限できることが分かる．つまり

$$\sqrt{1-c^2-ab}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2ciuv)}$$

の形のもの同士の積は**積の公式の中に虚数単位が現れないようにできる．**

同様に $iu^2, iv^2, 2iuv$ の係数というように見ると，やはり係数を実数に制限できる．つまり

$$\sqrt{1+ab-c^2}\, e^{\frac{i}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

の形のもの同士の積も**積の公式の中に虚数単位が現れないようにできる．**

2 次形式 $Q = au^2 - bv^2 + 2ciuv$ を実対称行列 $\tilde{Q}$ を使って

$$au^2 - bv^2 + 2ciuv = (u, iv)\,\tilde{Q}\begin{bmatrix} u \\ iv \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

と表しておく．$\det\tilde{Q} = c^2 - ab = -D(Q)$, および任意の $A \in SL(2;\mathbb{R})$ に対して ${}^tAJA = J$, $\det(A\tilde{Q}\,{}^tA) = \det(\tilde{Q})$ であることに注意しておく．

定理 5.2 積 $e^{\frac{1}{\hbar}Q_1} * e^{\frac{1}{\hbar}Q_2}$ はワイル順序表示では

$$P = (1-\det\tilde{Q}_1)(1-\det\tilde{Q}_2) + \det(\tilde{Q}_1+\tilde{Q}_2) \tag{5.33}$$

が $\neq 0$ の場合，かつそのときに限り $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{R}^2)$ の元として定義でき，次の形に書かれる：

$$\sqrt{1+\det\tilde{Q}_1}\; e^{\frac{1}{\hbar}Q_1} * \sqrt{1+\det\tilde{Q}_2}\; e^{\frac{1}{\hbar}Q_2} = \sqrt{1+\det\tilde{Q}_3}\; e^{\frac{1}{\hbar}Q_3}$$

但し，Q_3 は，$Q_3 = \frac{1}{P}Q_3'$ と書かれ

$$\tilde{Q}_3' = (1+\det\tilde{Q}_2)\tilde{Q}_1 + (1+\det\tilde{Q}_1)\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_1J\tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2J\tilde{Q}_1 \tag{5.34}$$

である．しかも，

$$1-\det\tilde{Q}_3 = -\frac{1}{P}(1-\det\tilde{Q}_1)(1-\det\tilde{Q}_2) \tag{5.35}$$

である．

極地元による変換

式(5.27)を使って極地元と他のいろいろな元との積を求めておこう．そのために少し一般的に考える：

元 $e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}uv}$ は正規順序表示でしか定義できなかった元だが，式(5.27)より次のような後々良く使われる等式が得られる．これは後で貼合せ写像にも使われる：

補題 5.3 判別式 $D=c^2-ab$ が $\neq 0$ のとき，

$$e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}uv}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=\frac{1}{\sqrt{c^2-ab}}e^{-\frac{1}{\hbar(c^2-ab)}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

である．右辺の e の肩にある 2 次式の判別式は $\frac{1}{c^2-ab}$ である．

証明　$s=\tan\frac{t}{\hbar}$ とすると，$e_*^{\pm\frac{t}{\hbar}2uv}=\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2uv}$ とかかれることに注意する．$t\to\pm\frac{\pi}{2}$ の極限では $s\to\pm\infty$ である．$\sqrt{1+s^2}$ を(5.27)式の両辺にかけて，$s^2\to\infty$ の極限を考えると，補題の証明となる．$\sqrt{c^2-ab}$ の符号は $s^2\to\infty$ とするときの道筋によるのでここではきめられない． □

上の証明には少し説明が必要であろう．というのは左辺の $e_*^{\pm\frac{t}{\hbar}uv}$ では $t\to\frac{\pi}{2}$ とするのか $t\to-\frac{\pi}{2}$ とするのかの区別ははっきりしている．ところがそれを $s^2\to\infty$ に置き換えてしまって，$\pm$ の区別をわざとなくしてしまって，そのかわりに $\sqrt{1+s^2}$ をつけているのである．

$\sqrt{1+s^2}$ のリーマン面を原始的なやり方で作ってみれば，これは球面であり ∞ は二箇所にある(これを $\infty_\pm$ と書いておく)ので，どちらの枝にのって lim を考えるかで ∞_+ に行くか ∞_- に行くかがきまるわけである．したがって，a,b,c を固定し，$s\to\infty$ とする道筋を実軸なら実軸に沿って $0\to\infty$ としてしまえば $s=0$ の所での値は 1 としておいて，

$$\lim_{s\to\infty}\sqrt{\frac{1+s^2}{1-2cs+(c^2-ab)s^2}}$$

が $\sqrt{c^2-ab}^{\,-1}$ (二つある)のどちらに収束しているのかは決定できる．

しかし，かりに実軸に沿って $s\to\infty$ とするように道筋を固定しておいても a,b,c を動かしてしまうと，すべてにわたって連続になるようには $\sqrt{c^2-ab}$ を決定できないのである(下の系 5.1 参照)．

系 5.1 $c^2-ab+1\neq 0$ のときには

$$e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}uv}*\sqrt{c^2-ab+1}\ e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=\sqrt{\frac{1}{c^2-ab}+1}\ e^{-\frac{1}{\hbar(c^2-ab)}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

であり，$c^2-ab+1=0$（真空元）のときには

$$e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}uv}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=\sqrt{-1}\ e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

である．

しかし，$\sqrt{-1}$ を i とすべきか，$-i$ とすべきかは a,b,c が動くと決めることができない．これを説明しておこう：$s\to\infty$ とする道筋を実軸に沿って $0\to\infty$ として

$$\lim_{s\to\infty}\sqrt{\frac{1+s^2}{1-2cs-s^2}},\quad \sqrt{1}=1$$

を考えよう．このとき c が実数でなければ実軸上に $1-2cs-s^2=0$ となる点はないから分岐の問題は起こらないが，c が実数だと $1-2cs-s^2=0$ は正負の実根を持つ．

$\sqrt{1-2cs-s^2}$ のリーマン面を作るときに，$1-2cs-s^2=0$ の根を $s_\pm$ とし，原点と $s_\pm$ を結ぶ直線を延長した部分にスリットを入れるものとしておくと，前もって選んでおいた $s\to\infty$ とする道筋(例えば ∞_+ へ行く道筋と思って選んでも)は，c が実軸を通過する瞬間に ∞_- へ行く道筋に意味が変わってしまう．ここで値が $\sqrt{\cdot}$ から $-\sqrt{\cdot}$ にジャンプする(符号を変える)のである．

注意 しかし，上の積公式に現れる $\sqrt{P}$ の不定性はいかにも気持が悪いから，何とかこれを消して考えたいと思うもの人情である．2 乗すれば $\sqrt{P}$ が P になるが，振幅部分だけを勝手に 2 乗するわけにはいかないから，これまで u,v だけで考えて来たところを，u_1,v_1,u_2,v_2 を生成元とする W^4 で考え，$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^4)$ を作りその中で，$e^{Q(u,v)}$ と考えて来た所を，$e^{Q(u_1,v_1)+Q(u_2,v_2)}=e^{Q(u_1,v_1)}e^{Q(u_2,v_2)}$ のように同じ形の元を，u_1,v_1 と u_2,v_2 を使って重ねて考える．$Q(u_1,v_1)*Q(u_2,v_2)=Q(u_2,v_2)*Q(u_1,v_1)$ だから，位相部分の計算はこれまでの計算がそのまま使えるし，振幅部分は 2 乗されるので都合が良い訳である．この操作を**ダブル(double)を作る**と言う．

W^2 を W^4 の対角部分に埋め込んだだけのように見えるが，振幅部分に現れるものがスカラーなのでこのようなことができるのである．ちなみに，$\tilde{\varepsilon}_{00}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(u_1v_1+u_2v_2)}$ とすると，これも極地元として扱うべき元であるが，

$$\tilde{\varepsilon}_{00}*\tilde{\varepsilon}_{00}=1,\quad u_i*\tilde{\varepsilon}_{00}+\tilde{\varepsilon}_{00}*u_i=0=v_j*\tilde{\varepsilon}_{00}+\tilde{\varepsilon}_{00}*v_j$$

となる．また，$\tilde{\varpi}_{00}=4e^{\frac{2i}{\hbar}(u_1v_1+u_2v_2)}$ とすると，これも真空として扱うべき元だが，

$$\tilde{\varpi}_{00}*\tilde{\varpi}_{00}=\tilde{\varpi}_{00},\quad v_i*\tilde{\varpi}_{00}=0,\quad i=1,2$$

となる．

$e^{Q(u_1,v_1)+Q(u_2,v_2)}$ を考える代わりに，$e^{Q(u_1,v_1)-Q(u_2,v_2)}$ を使うことにしても振幅部分は 2 乗され同様の結果となる．

しかし，このような細工で何もかもうまく行くと考えるのは ε_{00} の本性が変わったわけではないので早計である．$\tilde{\varepsilon}_{00}=\varepsilon_{00}^{(1)}*\varepsilon_{00}^{(2)}$ のように独立に考えなければならない所ではそれぞれが 2 価の元ならば $\tilde{\varepsilon}_{00}$ は 4 価の元として扱わなければならなくなる筈である．

5.3　いろいろな結合律の検証

これまで得られた積公式は $\frac{t}{\hbar}$, $\frac{a}{\hbar}$ 等が係数になっていたが，$t=t'\hbar, a=a'\hbar$ のようにして，$\hbar$ を含まない形を作ることができる．これ良くを見ると，Q_i, $i=1,2$ が $\hbar$ を含まない u,v の 2 次式のときには $e^{Q_1}*e^{Q_2}$ は $a(\hbar)e^{Q_3(\hbar)}$ の形に書かれ，$Q_3(\hbar)$ は u,v の 2 次式，かつ $a(\hbar),Q_3(\hbar)$ ともに $\hbar$ については ($\hbar\neq 0$ の所に特異点を持つことはあるが) 解析的であり，$\hbar=0$ の所まで定義できている．

5.3.1　第二結合律定理とその応用

上のことは，Q_i, $i=1,2$ が $\hbar$ を含んでいても，$\hbar$ について解析的であり，$\hbar=0$ の所まで定義できている場合ならば同様である．従って，第一結合律定理より次の定理が得られる：

定理 5.3（第二結合律定理）Q_i, $i=1,2,3$ が $\hbar$ については解析的であり，$\hbar=0$ の所まで定義できている 2 次式のとき，両辺が定義できておれば結合律 $(e^{Q_1}*e^{Q_2})*e^{Q_3}=e^{Q_1}*(e^{Q_2}*e^{Q_3})$ が成立する．

結合律が確認できると，それを使って次のことが分かる．直接計算はかなり難しいが，

$$Q_1\odot Q_2=\frac{1}{P}\Big(\tilde{Q}_1+\tilde{Q}_2-D(Q_2)\tilde{Q}_1-D(Q_1)\tilde{Q}_2-\tilde{Q}_1(iJ)\tilde{Q}_2+\tilde{Q}_2(iJ)\tilde{Q}_1\Big)$$

と置けば，$*$-積の結合律 $(e^{\frac{1}{\hbar}Q_1}*e^{\frac{1}{\hbar}Q_2})*e^{\frac{1}{\hbar}Q_3}=e^{\frac{1}{\hbar}Q_1}*(e^{\frac{1}{\hbar}Q_2}*e^{\frac{1}{\hbar}Q_3})$ より，

$$(Q_1\odot Q_2)\odot Q_3=Q_1\odot(Q_2\odot Q_3),\quad 0\odot Q=Q\odot 0=Q,\quad Q\odot(-Q)=0$$

が成立し，$P=P(Q_1,Q_2)$ は 2-コサイクル条件

$$P(Q_1,Q_2)P(Q_1,Q_2\odot Q_3)=P(Q_1\odot Q_2,Q_3)P(Q_2,Q_3)$$

をみたす．$D(Q_i)+1\neq 0$, $i=1,2$ で，$P(Q_1,Q_2)\neq 0$ ならば $Q_1\odot Q_2$ が定義される．

2 次の $*$-指数関数どうしの積が計算できるようになったから，それをもとに，この節の終に指数関数と $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $0<p<2$, の元のからんだ元の結合律を示しておこう．Q_i, $i=1,2,3,\ldots$ は u,v の 2 次式，f_i, $i=1,2,3,\ldots$ は $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $0<p<2$, の元としよう．

補題 5.4 $e_*^{sQ_1}*e_*^{tQ_2}$ が定義できていると，次の両辺は定義でき，

$$e_*^{sQ_1}*(e_*^{tQ_2}*f_1)=(e_*^{sQ_1}*e_*^{tQ_2})*f_1$$

が成立する[注5]．

証明 定理 2.2 により，$e_*^{tQ_2}*f_1$ は定義される．一方，仮定と定理 5.3 より $(e_*^{sQ_1}*e_*^{tQ_2})*f_1$ も定義できるが，$e_*^{sQ_1}*e_*^{tQ_2}$ が定義できている所ではこれは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元だから

$$\frac{d}{ds}(e_*^{sQ_1}*e_*^{tQ_2})*f_1=Q_1*((e_*^{sQ_1}*e_*^{tQ_2})*f_1)$$

が成立している．$s=0$ では $e_*^{tQ_2}*f_1$ だから，一意性により望みの等式が得られる． □

第二結合律定理を使うと，同じ論法で次のことが分かる：

$$e_*^{rQ_1}*(e_*^{sQ_2}*e_*^{tQ_3}*f_1)=(e_*^{rQ_1}*e_*^{sQ_2}*e_*^{tQ_3})*f_1 \tag{5.36}$$

さらに次も分かる：

定理 5.4 $r,s,t\in\mathbb{C}$ に対して $*$-指数関数の部分が定義できておれば

$$\begin{aligned}\left(f_1*e_*^{sQ_1}*f_2\right)*\left(f_3*e_*^{tQ_2}*f_4\right)&=\left(f_1*e_*^{sQ_1}\right)*\left(f_2*f_3*e_*^{tQ_2}*f_4\right)\\&=\left(f_1*e_*^{sQ_1}*f_2*f_3\right)*\left(e_*^{tQ_2}*f_4\right)\end{aligned}$$

注5 これを s とか t について広義積分してしまうとこの種の結合律が崩されるのである．

が成立する．さらに，次も成立する：

$$\big(f_1 * e_*^{rQ_1} * f_2 * e_*^{sQ_2}\big) * f_3 * e_*^{tQ_3} = f_1 * e_*^{rQ_1} * \big(f_2 * e_*^{sQ_2} * f_3 * e_*^{tQ_3}\big)$$

証明　まず系 3.1 の交換則と補題 5.4 より

$$\begin{aligned} e_*^{sQ_1} * (f_1 * e_*^{tQ_2}) &= (e_*^{sQ_1} * e_*^{tQ_2}) * (e^{-t\mathrm{ad}(Q_2)} f_1) \\ &= (e^{s\mathrm{ad}(Q_1)} e_*^{t\mathrm{ad}(Q_2)} e^{-t\mathrm{ad}(Q_2)} f_1) * (e_*^{sQ_1} * e_*^{tQ_2}) \end{aligned}$$

$$(e_*^{sQ_1} * f_1) * e_*^{tQ_2} = (e^{s\mathrm{ad}Q_1} f_1) * (e_*^{sQ_1} * e_*^{tQ_2})$$

だから，任意の $f_1 \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2),\, 0 < p < 2$ に対して

$$e_*^{sQ_1} * (f_1 * e_*^{tQ_2}) = (e_*^{sQ_1} * f_1) * e_*^{tQ_2} \tag{5.37}$$

が成立する．

第一の式は，まず系 3.1 の交換則を使って

$$\big(f_1 * e_*^{sQ_1} * f_2\big) * \big(f_3 * e_*^{tQ_2} * f_4\big) = \big(e_*^{sQ_1} * \tilde{f}_1\big) * \big(f_3 * e_*^{tQ_2} * f_4\big)$$

のように書き，補題 5.4 の証明と同じ論法で

$$\big(e_*^{sQ_1} * \tilde{f}_1\big) * \big(f_3 * e_*^{tQ_2} * f_4\big) = e_*^{sQ_1} * (\tilde{f}_1 * (f_3 * e_*^{tQ_2} * f_4))$$

だが，$\tilde{f}_1 * (f_3 * e_*^{tQ_2} * f_4)$ については結合律が成立しているから，上と同様の議論をすれば良い．　□

これより，交換則と組み合わせて，積 $(f_1 * e_*^{sQ_1} * f_2) * (f_3 * e_*^{tQ_2} * f_4)$ が自由に計算できることになる．

$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $0 < p < 2$, の元 $f(u,v)$ については，$f(u,v)*$ も $*f(u,v)$ も $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ 上の連続写像だったからこれを使うと任意のコンパクトな区間 I, I' での積分までは安全で

$$\begin{aligned} &\Big(f_1 * \int_I e_*^{tQ_1} dt * f_2\Big) * \Big(f_3 * \int_{I'} e_*^{sQ_2} ds * f_4\Big) \\ &\qquad = \Big(f_1 * \int_I e_*^{tQ_1} dt\Big) * \Big((f_2 * f_3) * \int_{I'} e_*^{sQ_2} ds * f_4\Big) \end{aligned}$$

といった式も得られる．

5.4　極大積分曲面 M^3, N^3

この節では 2 次式の指数関数の積公式を少し別の角度から考察しよう．特にワイル順序表示では表示できていなかった元を正規順序表示で詳しく計算

する．極地元が唯一点 ε_{00} (2 価) からなることは前節で述べたが．ε_{00} や真空を含む積の公式を確立する．

5.4.1 リー群 $SL(2;\mathbb{C})$ のリー環とその作用

$SL(2;\mathbb{C}) = \{A \in M(2;\mathbb{C}); \det A = 1\}$ であり，これは複素 3 次元多様体である．我々はかなり考えにくいものを持ち込もうとしているので，次の古典的結果を思い出しておいてもらいたい：

$SL(2,\mathbb{C})$, $SL(2,\mathbb{R})$ の分解定理

補題 5.5 多様体としては $SL(2,\mathbb{C})$ は $SU(2)\times\mathbb{R}^3$ と可微分同相であり，$SU(2)$ は 3 次元球面 S^3 と可微分同相である．

また，$SL(2,\mathbb{R})$ は多様体としては $SO(2)\times\mathbb{R}^2$ と可微分同相であり，$SO(2)$ は 1 次元球面 S^1 と可微分同相である．

証明

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha, & \beta \\ -\bar{\beta}, & \bar{\alpha} \end{bmatrix};\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

であるから，$SU(2) = S^3$ は明らか．$SO(2) = S^1$ も明らかであろう．

前半の証明は極分解を用いる．$A \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して A^*A は正定値エルミート行列であるから $\log A^*A$ がうまく定義できることを使って，$A^*A = \exp(2H)$ の形にエルミート行列 H を使って一意的に書かれ，しかも H と A とは可換となる．$U = A\exp(-H)$ とすれば，これがユニタリーであることはすぐに分かるから，$A = U\exp H$ という一意的分解を得る．これを**極分解**という．これより，前半が得られる．

この話を全部実数で考えれば $SL(2,\mathbb{R})$ の極分解も得られる． □

補題 5.6 固有値が -1 (重根) で $-I$ と異なる $SL(2,\mathbb{C})$ の元，つまり

$$A = \begin{bmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & -(\alpha+2) \end{bmatrix}, \quad (\alpha+1)^2 + \beta\gamma = 0$$

は $SL(2,\mathbb{C})$ の 1 径数部分群に載っていない．また，これ以外の元はすべて 1 径数部分群に載っている．

証明　$A=\exp tB$ としてみよう．B に対して $T\in SL(2,\mathbb{C})$ があって，TBT^{-1} は上三角行列となる．すると，$TAT^{-1}=\exp tTBT^{-1}$ であり，左辺の TAT^{-1} も上三角行列で，固有値が -1（重根）のものとなるから対角成分は $-I$ である．$\mathrm{tr}\,B=0$ でなければならないから，

$$TBT^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha, & \beta\\ 0, & -\alpha\end{bmatrix}\quad とすると\quad \exp tTBT^{-1}=\begin{bmatrix}e^{\alpha t}, & \frac{\beta}{\alpha}\sinh\alpha t\\ 0, & e^{-\alpha t}\end{bmatrix}.$$

従って対角成分を $-I$ にするには $\alpha t=\pi i$ としなければならないが，そうすると $\sinh\pi i=0$ となってしまう．

また，A の固有値が重根でなければ，対角化することにより，1 径数部分群に載っていることが分かる．また $\pm I$ はどちらも 1 径数部分群に載っている．□

上の補題では $-e_*^{(\alpha u+\beta v)^2}$ は 1 径数部分群に載っていないのだが，2×2 行列への随伴表現では $\mathrm{Ad}(\pm e_*^{(\alpha u+\beta v)^2})$ は区別されず $\exp(\mathrm{ad}((\alpha u+\beta v)^2)$ となる．随伴表現ではいつでも $\pm$ は無視される．そのかわり，$\mathrm{Ad}(\pm\varepsilon_{00})=-I$ となる．

このことと補題 5.6 より，$\pm\varepsilon_{00}*e^{(\alpha u+\beta v)^2}$ は $e^{(\alpha u+\beta v)^2}\neq 1$ の場合には 1 径数部分群に載っていないことが分かる．次の事は良く知られていることではあるが，我々の今の立場を側面から言い当てている：

補題 5.7 $SL(2,\mathbb{R})$ の（非自明な）被覆群はリー群として存在しているが，これの複素化リー群は存在しない．

証明　存在したとして，これを $\tilde{G}$ とすればそのリー環は $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ である．したがって $\tilde{G}=SL(2;\mathbb{C})$ または $SL(2;\mathbb{C})$ を中心の群 $\mathbb{Z}_2$ で割ったもののいずれかである．従って，G の中心は高々位数 2 の有限群である．

一方，$SL(2;\mathbb{R})$ の非自明な被覆群 G は 4 個以上の元から成る中心の群 Z を含んでいる．任意の $z\in Z$ に対して $\mathrm{Ad}(z)$ は $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R})$ に自明に作用するから，これを複素化した $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ にも自明に働く．これより，$G\subset\tilde{G}$ とすれば，Z は $\tilde{G}$ の中心にもなっていなければならない．これは矛盾である．□

つまり，点集合としての複素リー群はさほど豊かでないのである．しかし，$\tilde{G}$ のようなものは何らかの意味で考えたくもなるであろう．それを考えるヒントがこの章にある．

局所リー群，リー代数の作用

多様体 M 上の特異分布(singular distribution) $\mathfrak{D}$ とは M の各点 p で，M の p での接空間の部分空間 $\mathfrak{D}(p)$ が与えられていて，部分空間を指定する係数の方は C^∞ 関数として与えられるが，指定される部分空間の次元 $\dim \mathfrak{D}(p)$ が場所に依存しているようなものを指す．次元が一定の場合は単に**分布**(distribution)と呼ばれる．特異分布は一般には扱いにくいのだが，リー群の局所的な作用によって与えられているときには強包合的な特異分布と呼ばれる極めて扱いやすい性質を持つ．

定義 5.1 G をリー群，M を多様体とする．G が M に**可微分に局所的に作用する**とは，$G\times M$ の中での $\{e\}\times M$ の近傍 W と次の様な C^∞ 写像 $\varphi : W \to M$ が存在することを言う：

- e を単位元とするとき，任意の $x \in M$ で $\varphi(e,x) = x$.
- 任意の $(g,x) \in W$ に対して x の近傍 V_x を $(g,V_x) \subset W$ となるようにとれば $\varphi(g,\cdot)$ は V_x から M の中への可微分同相である．
- 上の写像を φ_g と書くと，両辺が定義できているところでは $\varphi_g\varphi_h = \varphi_{gh}$ が成立．

リー群 G が M に可微分に局所的に作用しているとして，その作用を $\varphi : W \to M$ とする．$\mathfrak{g}$ を G のリー環，T_xM を x における M の接空間とする．また，

$$d_1\varphi_{(e,x)} : \mathfrak{g} \to T_xM$$

を φ の (e,x) における，第一変数 g に関する微分写像とする．

定義 5.2 リー群 G が M に可微分に局所的に作用している場合，その作用を $\varphi : W \to M$ として $d_1\varphi_{(e,x)}(\mathfrak{g})$ によって作られる特異分布を**強包合的特異分布**と呼ぶ．

前節までの結果から，積 $e_*^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+2\gamma uv)} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は少なくとも α,β,γ が (a,b,c) に応じて十分 0 に近いときには定義できる．定理 5.3 より，結合律が成立しているから，積

$$e_*^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+2\gamma uv)} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

は $SL(2;\mathbb{C})$ の可微分な局所作用になっている．したがってこれの微分で作る特異分布は強包合的特異分布となる．ここで強包合的な特異分布について知られていることをまとめておこう．

定理 5.5 $\mathfrak{D}=\{\mathfrak{D}(p); p\in M\}$ を強包合的分布な特異分布とする．このとき，M の任意の点 q に対して，q を含む M の部分多様体[注6] N_q で，任意の $p\in N_q$ での N_q の接空間 T_pN_q が与えられた $\mathfrak{D}(p)$ となるようなものが唯一つ存在する．これを $\mathfrak{D}$ の，q を通る**極大積分多様体**と呼ぶ．

さらに，$\mathfrak{D}=\{\mathfrak{D}(p); p\in M\}$ が正則な強包合的分布特異分布のときには，得られる極大積分多様体は複素多様体となる．

上の定理は通常の包合的分布における，フロベニウスの定理に相当しているが，特異分布でも使えるようになっているところが良いところである．

5.4.2　積分多様体

まずモイヤル積公式の方で考えよう．空間 $\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}_*$ を考え，$\pi:\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}_*\to\mathbb{C}^3$ を第四成分を忘れる自然な射影とする．任意に選んだ点 $(a,b,c;s)\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}_*$ に於いて式 (5.3)を使って $\mathbb{C}^4$ の線型部分空間 $D(a,b,c;s)$ を

$$D(a,b,c;s)=\{(a',b',c')M(a,b,c;s)|\ (a',b',c')\in\mathbb{C}^3\}$$

で定義する．$V_\mu=\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3; c^2-ab+1=0\}$ としたとき，$(a,b,c;s)\in(\mathbb{C}^3-V_\mu)\times\mathbb{C}_*$ ならば $D(a,b,c;s)$ は 3 次元で $V_\mu\times\mathbb{C}_*$ 上では 2 次元である．このように，部分空間を指定する係数の方は正則関数として与えられるが，指定される部分空間の次元が場所に依存しているような $\mathfrak{D}=\{D(a,b,c;s)\}$ を $\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}_*$ 上の**正則特異分布**(holomorphic singular distribution)と呼ぶ．

$\mathbb{C}^3-V_\mu$ は弧状連結だが，単連結ではない．このことは $\mathbb{C}^3$ から $\mathbb{C}$ への写

[注6] 部分多様体の定義は色々あるが，これは正確には immersed submanifold と呼ぶべきものである．

像 $f(x,y,z) = z^2 - xy$ を考え，$f^{-1}(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathbb{C}^3 - V_\mu$ に注意すれば容易に分かる．

また，c にあたる所を純虚数にして，常に $au^2 + bv^2 + 2ciuv$ の形で考えるならば，a, b, c は実数に制限できる．$\mathbb{R}^4$ を $(a,b,c;s) \to (a,b,ci;s)$ の形で $\mathbb{C}^4$ の中に埋め込んで，$V_{\mu,R} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; c^2 + ab = 1\}$ と定義する．$\mathbb{R}^3 - V_{\mu,R}$ は二つの領域に分かれるが，$\mathfrak{D}$ はこの $(\mathbb{R}^3 - V_{\mu,R}) \times \mathbb{R}$ 領域上に実 3 次元の分布を定義している．

前節での計算から，$\mathfrak{D}$ はリー群 $SL(2;\mathbb{C})$ の無限小の作用で与えられていることが分かったので，これを使うと $\mathfrak{D}$ は $(\mathbb{C}^3 - V_\mu) \times \mathbb{C}_*$ 上では通常の包合的分布(involutive distribution)であることが分かるから，そこでは普通のフロベニウスの定理が使える[注7]．

$M(a,b,c)$ の逆行列をていねいに計算してみれば

$$M(a,b,c)^{-1} = \frac{1}{(1+c^2-ab)^2}\begin{bmatrix} -(c-i)^2, & -b^2, & -b(c-i) \\ -a^2, & -(c+i)^2, & -a(c+i) \\ 2a(c-i), & 2b(c+i), & c^2+ab+1 \end{bmatrix},$$

が分かる．従って $(\mathbb{C}^3 - V_\mu) \times \mathbb{C}_*$ 上の分布 $\mathfrak{D}_\mu$ は次で与えられる：

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0; & \frac{1}{2}\partial_a \log(1+c^2-ab) \\ 0, & 1, & 0; & \frac{1}{2}\partial_b \log(1+c^2-ab) \\ 0, & 0, & 1; & \frac{1}{2}\partial_c \log(1+c^2-ab) \end{bmatrix}.$$

これより積分曲面 M^3 はすぐ分かって，$(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 - V_\mu$ を動かして

$$(a,b,c; \sqrt{1+c^2-ab}) \Longleftrightarrow \sqrt{1+c^2-ab}\; e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}, \tag{5.38}$$

で与えられる．$\sqrt{\ }$ は 2 価関数だから，M^3 は $\mathbb{C}^3 - V_\mu$ の連結な 2 重被覆空間である．

定理 5.5 を使って，原点 $(0,0,0;1)$ を通る **3 次元極大複素積分多様体**(maximal holomorphic integral submanifold) は M^3 であることが分かる．

注7 定理 5.5 は次元が変化している所で 2 次元の積分多様体が 3 次元の積分多様体の中にもぐり込んでいったりすることはないということまで述べているのである．

曲線 $\boldsymbol{g}(t)=(a(t),b(t),c(t);s(t))$ が任意の t で $\frac{d}{dt}\boldsymbol{g}(t)\in D(\boldsymbol{g}(t))$ を満たしているとき，$\mathfrak{D}$ の**積分曲線**(の一つ)であると言う．

$\mathbb{C}^3-V_\mu$ 内の任意の曲線 $\boldsymbol{c}(t)=(a(t),b(t),c(t))$ に対しては

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}\\&\quad=(a'(t)u^2+b'(t)^2+2c'(t)uv)*e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}\end{aligned}$$

となる $(a'(t),b'(t),c'(t))$ が唯一つ見つかるから，これを使って

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{c}(t);s(t))=(a'(t),b'(t),c'(t))M(a(t),b(t),c(t);s(t))$$

という式を考えると，これは $s(t)$ に対する線型の微分方程式になっており，これを解いて，積分曲線 $\boldsymbol{g}(t)$ で $\pi(\boldsymbol{g}(t))=\boldsymbol{c}(t)$ となるものが作れる．$\boldsymbol{g}(t)$ は $\boldsymbol{c}(t)$ の**リフト**(lift)と呼ばれる．

初期条件 $\boldsymbol{g}(0)$ を固定し，$\boldsymbol{c}(0)=\pi(\boldsymbol{g}(0))$ と $\boldsymbol{c}(1)$ を固定したときには，$\mathfrak{D}$ が包合的分布だから $t=1$ におけるリフト上の点 $\boldsymbol{g}(1)$ は $\boldsymbol{c}(0)$ と $\boldsymbol{c}(1)$ を $\mathbb{C}^3-V_\mu$ 内で結ぶ曲線のホモトピー類にのみ依存する．つまり，$\boldsymbol{g}(1)$ は $(0,0,0)$ と $\boldsymbol{c}(1)$ を結ぶ曲線のホモトピー類にしか依存しない．しかも (2.2)式はこの分布(distribution)が右不変であると言っているのである．

結果として極大積分曲面 M^3 上に局所群の構造が入る．局所群とは，位相群の単位元の近傍が持っている性質を抜き出して公理化したもので，単位元のある近傍の中の元同士では積が定義できるが，いつでも積が定義できるわけではない．しかし，積が定義出来ておれば，結合律は成立するようになっているものである．

次のことはもはや自明であろう：

補題 5.8 $\mathbb{C}^3$ 内の原点を通る複素直線のリフトは 1 径数部分群

$$\{e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};t\in\mathbb{C}\}$$

から離散的部分集合を除いたものである．

この複素直線 $t(a,b,c)$ は $c^2-ab=0$ のときには特異点を持たないが $c^2-ab=1$ のときには，$t=\pm\pi(n+\frac{1}{2})$ のところで M^3 からはみだして特異点となり，

そこでは正規順序表示で計算すると $\pm\varepsilon_{00}$ となる．

式(3.3), (3.4)とか式(5.16)に戻って考える．複素数の平方根を使っているので $\pm\sqrt{ab-c^2}$ の不定性があるのだが，この不定性は解の違いとしては現れない．しかし cos と tan の周期の違いから $c^2-ab\neq 0$ の場合には

$$\pi^{-1}\pi\{e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}; t\in\mathbb{C}\} = \{\pm e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}; t\in\mathbb{C}\} \tag{5.39}$$

となることが分かる．

$\tan\theta=\sqrt{c^2-ab}$ ならば $\frac{1}{\cos^2\theta}=c^2-ab+1$ だから，式 (3.3)は

$$\sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = e_*^{\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}(\arctan\sqrt{c^2-ab})(au^2+bv^2+2cuv)} \tag{5.40}$$

と同値である．cos と tan との周期の違いから式(5.40)においては $\sqrt{c^2-ab+1}$ の符号が定まらない．

これを使って，次のことが分かる：

命題 5.1 $c^2-ab+1\neq 0$ なら，$\pm\sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は M^3 の元である．逆に $Q\in M^3$ が $\pi(Q)=e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ となっておれば，

$$Q=\pm\sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

である．ただし $c^2-ab+1\neq 0$ である．これらは

$$Q=-e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},\ c^2-ab=0,\quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$$

となる場合を除いて，次の形に書かれる $*$-指数関数である：

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\quad a,b,c\in\mathbb{C}$$

証明 $c^2-ab+1\neq 0$ ならば，$c^2-ab+1=1+\tan^2(\arctan\sqrt{c^2-ab})$ である．従って $c^2-ab\neq 0$ ならば (5.40)式から $\pm\sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は $*$-指数関数の形に書かれることが分かる．

$ab-c^2=0$ の場合には $\frac{1}{\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\sqrt{ab-c^2}\,t)=t$ とすべきだったから

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = e^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},\quad ab-c^2=0 \tag{5.41}$$

である．これは $au^2+bv^2+2cuv=(\sqrt{a}u+\sqrt{b}v)^2$ のときには $*$-指数関数は通常の指数関数に一致すると述べている．これで全ての方向に打ち出された 1 径数部分群

を考えたことになるが，その中に $Q=-e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$, $c^2-ab=0$ を通過するものは無い. □

これより次も分かる：

命題 5.2 指数写像 $\exp_*:\mathbb{C}^3-\Pi_0\to\mathbb{C}^3-V_\mu$ は正則写像で

$$\exp_*(\mathbb{C}^3-\Pi_0)=M^3-\{-e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\ c^2-ab=0,\ (a,b,c)\neq(0,0,0)\}$$

となる．特に -1 も $\exp_*(\frac{\pi}{\hbar}2uv)=-1$ だから $*$-指数関数の像である．

命題5.1は $\pi:M^3\to\mathbb{C}^3-V_\mu$ が全射であることも示している．M^3 の点は原点 $(0,0,0)$ から出る $\mathbb{C}^3-V_\mu$ 内の曲線のリフトで作られている．前に述べたように M^3 は $\mathbb{C}^3-V_\mu$ の二重被覆である．

しかし，無限遠点には $\pm\varepsilon_{00}*e^{(au+bv)^2}$ といった点が貼りついているものである(後の境界元の項参照)．この $\pm\varepsilon_{00}$ は一つの表示方法では計算できない元なので，1点と思うことも2点と思うこともできるものであった．

式(3.3)より特に，$c^2-ab\neq 0$ ならば，

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}(au^2+bv^2+2cuv)}=-1,\quad e_*^{\frac{\pi}{2\hbar\sqrt{c^2-ab}}(au^2+bv^2+2cuv)}=\text{発散}$$

となる．これらをまとめて次が分かる：

命題 5.3 M^3 は局所リー群の構造を持ち，そのリー環は $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$．しかし $\pi:M^3\to\mathbb{C}^3-V_\mu$ は $\pi(\pm a)=a$ を満たす二重被覆である．M^3 は連結集合なのでこの被覆は $\mathbb{C}^3-V_\mu$ 上の非自明な二重被覆である．

しかし，素直に $SL(2,\mathbb{C})$ の開部分集合と対応しているのは $\mathbb{C}^3-V_\mu$ のほうであって，M^3 の方はそれの被覆空間である．

積分曲面を使った考察から $se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ の形に書かれる元どうしの積 $*$ は次のように定義してもよいことが分かる：

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}$$

$t\in[0,1]$, を1と $se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ とを結ぶ $\mathfrak{D}$ の積分曲線とする．

積分曲線なのだから，曲線 $(\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))\in\mathbb{C}^3$ があって

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}\\&\quad=(\alpha(t)u^2+\beta(t)v^2+2\gamma(t)uv)*s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}\end{aligned} \tag{5.42}$$

となるのだが，$s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(a(t)u^2+b(t)v^2+2c(t)uv)}$ は常微分方程式系 (5.42)の初期条件 1 の解でもある．

そこで，同じ微分方程式系(5.42)をこんどは初期条件 $s'e^{\frac{1}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)}$ で考えよう．解が存在するならば，それを

$$se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}*s'e^{\frac{1}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)}$$

のように書いて，$se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ と $s'e^{\frac{1}{\hbar}(a'u^2+b'v^2+2c'uv)}$ との $*$-**積**と定義するのである．

積は常微分方程式の解をつなぎあわせるだけなので，次の命題を得る：

命題 5.4 二次式の指数関数どうしの積の計算では積が M^3 内で定義できておれば，結合律は常に成立する．

(5.27) 式と(5.10) 式を考えこれまでのことをまとめると次が分かる：

定理 5.6 M^3 は局所的に $SL(2,\mathbb{C})$ と同型な局所群をなす．M^3 は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中に

$$M^3=\{\pm\sqrt{c^2-ab+1}\ e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\ c^2-ab+1\neq 0\}$$

の形で埋め込まれている．これの稠密開部分集合

$$M^3-\{-e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\ c^2-ab=0,(a,b,c)\neq(0,0,0)\}$$

は $*$-指数関数の族 $\{e_*^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\}$ で覆われている．

積が定義できている所で $M^3*M^3=M^3$ である，しかし，ある部分集合 $\Pi=\{P=0\}\subset M^3\times M^3$ の所では $*$-積が定義できない．

境界元

ここで，多様体 M^3 の無限遠方には極地元 ε_{00} のみが貼りついているのではないことを注意しておこう．

我々はすでに $e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$ や $e^{\frac{t}{\hbar}v^2} * e^{\frac{r}{\hbar}u^2}$ は $1+rs=0$ の場合にはワイル順序表示では定義されないことを見てきた．

さらにこれらは2次式の $*$-指数関数としても表示されないことつまり1径数部分群の元でないことを見てきた．しかもそれらは極地元でもなかった．これらは $\varepsilon_{00} * e_*^{(\alpha u+\beta v)^2}$ のように表示される元であった．

このような，$\varepsilon_{00} * e_*^{(\alpha u+\beta v)^2}$ の形に表示される元を**境界元**と呼ぶことにする．$\varepsilon_{00} * e_*^{(\alpha u+\beta v)^2} = e_*^{(\alpha u+\beta v)^2} * \varepsilon_{00}$. であるから ε_{00} はどちらに書いても良い．

定理10.2で分かることだが，ε_{00} は単一の元ではあるが量子正準共役対に応じて様々な表示を持つ．境界元の全体は複素2次元の多様体をなしている．

極大積分多様体 N^3

これまでモイヤル積公式でやってきたことを，こんどは ΨDO-積公式でやってみよう．行列 (5.6)で考える．

空間 $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_*$ を考え，$\pi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}^3$ を第四成分を忘れる自然な射影とする．任意に選んだ点 $(a,b,c;s) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_*$ に於いて式 (5.3)を使って $\mathbb{C}^4$ の線型部分空間 $\mathfrak{D}_\nu(a,b,c;s)$ を

$$\mathfrak{D}_\nu(a,b,c;s) = \{(a',b',c')N(a,b,c;s) |\ (a',b',c') \in \mathbb{C}^3\}$$

で定義する．$V_\nu = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3; 2ci+1=0\}$ としたとき，$\mathfrak{D}_\nu(a,b,c;s)$ は $(a,b,c;s) \in (\mathbb{C}^3 - V_\nu) \times \mathbb{C}_*$ ならば3次元で $V_\nu \times \mathbb{C}_*$ 上では2次元である．指定される部分空間の次元が場所に依存しているので $\mathfrak{D}_\nu = \{\mathfrak{D}_\nu(a,b,c;s)\}$ は $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_*$ 上の**正則特異分布**(holomorphic singular distribution)であるが，$SL(2,\mathbb{C})$ の局所的作用で作られているので，これも強包合的特異分布である．前の方で述べたように，V_ν は真空に対応しているところである．$\mathbb{C}^3 - V_\nu$ は弧状連結だが，単連結ではない．$(\mathbb{C}^3 - V_\nu) \times \mathbb{C}_*$ 上では通常の正則分布だからフロベニウスの定理を使って1を通る積分多様体を作り，これを N^3 と表す．

$N(a,b,c)$ の逆行列をていねいに計算すれば

$$N(a,b,c)^{-1} = \frac{1}{(1+2ci)^2}\begin{bmatrix} (1+2ci)^2, & 0, & 0 \\ -4a^2, & 1, & -2ai \\ -4ai(1+2ci), & 0, & 1+2ci \end{bmatrix},$$

であることが分かる．従って $(\mathbb{C}^3 - V_\nu)\times\mathbb{C}_*$ 上の分布 $\mathfrak{D}_\nu$ は $\partial_a \log(1+2ci) = 0$ などに注意して，次で与えられる：

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0; & \frac{1}{2}\partial_a \log(1+2ci) \\ 0, & 1, & 0; & \frac{1}{2}\partial_b \log(1+2ci) \\ 0, & 0, & 1; & \frac{1}{2}\partial_c \log(1+2ci) \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{D}_\nu$ は $(\mathbb{C}^3 - V_\nu)\times\mathbb{C}_*$ 上の普通の包合的分布なわけであり，積分曲面 N^3 は

$$(a,b,c;\sqrt{1+2ci}) \Longleftrightarrow \sqrt{1+2ci}\ e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)} \tag{5.43}$$

で与えられる．$\sqrt{}$ は 2 価関数だから N^3 は $\mathbb{C}^3 - V_\nu$ の非自明 2 重被覆である．定理 5.5 を使って $\mathfrak{D}_\nu$ の原点 $(0,0,0;1)$ を通る正則極大積分曲面が N^3 であることも分かる．

補題 5.9 N^3 は連結で ± 1 を含みしかも $\mathbb{C}^3 - V_\nu$ の二重被覆である．

演習問題 相互変換 $I_\circ^\circ$ の微分写像によって $\mathfrak{D}_\mu$ は $\mathfrak{D}_\nu$ に変換されることを確かめよ．また $I_\circ^\circ$ が定義できている場所では M^3 は N^3 に写されていることを確かめよ．

5.4.3 $V_\mu \times \mathbb{C}_*$ 内の点を通る極大積分多様体

$\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_*$ の中で $V_\mu \times \mathbb{C}_*$ なる 3 次元複素部分多様体を考えておく．

分布 $\mathfrak{D}_\mu$ は強包合的分布だったから，これを $V_\mu \times \mathbb{C}_*$ に制限したものはやはり強包合的分布である．

$V_\mu \times \mathbb{C}_*$ 内の点を通る極大積分多様体は 2 次元複素部分多様体をなし，これを M^2 と表すと M^2 の点を始点とする任意の積分曲線 $\boldsymbol{g}(t)$ はこの空間内に留まる．

$\pi(M^2)$ は V_μ の 1 次元複素部分多様体(複素曲線)となる．従って，$V_\mu \times \mathbb{C}_*$

は極大積分多様体で葉層化(foliated)されている．このことは次のような直接計算でも確かめられる．(5.11)式の計算から次が分かる：

補題 5.10 $1+bt\neq 0$ の条件の下で，$e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ が真空ということと，$e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ が真空のスカラー倍ということ，つまり $c^2-ab+1=0$ とは同値である．

全く同様，$1-2cs+(c^2-ab)s^2\neq 0$ の条件の下で，$e_*^{\frac{s}{\hbar}uv} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ が真空ということと，$e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ が真空のスカラー倍ということとは同値である．

証明　これは次の2次形式

$$\frac{1}{(1+bt)}\{(a+(ab-c^2-2ci+1)t)u^2+bv^2+2(c-ibt)uv\}$$

について $D+1$（判別式 $+1$）が $\frac{c^2-ab+1}{1+bt}$ で与えられ，零となることによる．次の場合も同様である．　□

上の補題と命題 1.3 の $SL(2;\mathbb{C})$ 不変性を使うと次の一般の場合の結果が得られる：

補題 5.11 $P=(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)-D(Q_1+Q_2)\neq 0$ の条件の下で，$e_*^{\frac{t}{\hbar}Q_1} * e^{\frac{1}{\hbar}Q_2}$ が真空ということと，$e^{\frac{1}{\hbar}Q_2}$ が真空に比例しているということ，つまり $D(Q_2)+1=0$ とは同値である．

証明　$e_*^{\frac{t}{\hbar}Q_1} * e^{\frac{1}{\hbar}Q_2}=Ce^{\frac{1}{\hbar}Q_3}$ とすると，$e_*^{\frac{t}{\hbar}Q_1}=e^{\frac{1}{\hbar}Q'_1}$, $Q_3=\frac{1}{P}\tilde{Q}_3$ とすると，

$$D(\tilde{Q}_3)+P^2=P(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)$$

であり，$D(Q_1)+1\neq 0$ だから，$D(Q_2)+1=0$ と $D(Q_3)+1=0$ とは同値である．　□

これらはワイル順序表示の場合であるが，正規順序では容易に

$$\begin{aligned} e_\circ^{\frac{t}{\hbar}u^2} * e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} &= e_\circ^{\frac{1}{\hbar}((a+t)u^2+bv^2+2cuv)}, \\ e_\circ^{\frac{t}{\hbar}uv} * e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} &= e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(a(1+it)^2u^2+bv^2+(c+(ci+\frac{1}{2})t)2uv)} \end{aligned} \tag{5.44}$$

であることが分かる．これは2次式の指数関数どうしの $*$-積はうまく量子正準共役対を選べば計算できることを意味する．特に $e_\circ^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ が極地

元の場合を考えてみると，極地元はどの正規順序表示でも同じ表示を持ち，任意の 2 次式と可換だから

$$\varepsilon_{00} * e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}au^2} = \sqrt{-1}e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}au^2},$$
$$\varepsilon_{00} * e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = \sqrt{-1}e_{\circ}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+(i-c)2uv)}$$

が得られ．$\varepsilon_{00}^2 = -1$ であるから，結局どの正規順序表示でも $N^3 = \varepsilon_{00} * N^3$ であることが分かる．

いずれにしろ，M^3 と N^3 とを合わせて考えると，$*$-積で閉じていると言って良いものになっている．これは最後の章で詳しく述べるが集合としては $M^3 \bigcup \varepsilon_{00} * M^3$ のようなものを考えておけば良いことを意味する．しかしこれが点集合としての意味があるとすると単連結であるはずの $SL(2,\mathbb{C})$ の 2 重被覆群になっていなくてはいけないのだから，明らかな矛盾である．従ってこれがいかなる意味でリー群と思えるのかはなかなか難しいので，最後の章で一つの考え方を述べるにとどめた．

注意 N^3 についても M^3 でやったのと同じような結果が得られるが，積が定義できない場所($P = 0$ にあたる場所)を書き下すことはできていない．しかし，この場所はワイル順序表示のときとはかなり違うところにできるようである．

第6章 対称性を破る拡張

$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ は $0 < p \leq 2$ の場合は $*$-積で閉じていたし，この空間は $SL(2,\mathbb{C})$ の自然な作用で不変であった．しかし $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中では $\sum f_i * e_*^{q_i}$ (有限和) のようなものしか積の計算ができなかった．

ここではまず $SL(2,\mathbb{C})$ 対称性をあきらめて，$SL(2,\mathbb{R})$ の自然な作用で不変というところで我慢して，その代わりもっと関数空間をふくらますことを考えよう．このような所に話を持っていくのは他でもない，古典微分幾何学と称するものは大体実数 $\mathbb{R}$ を基礎にして組み立てられているし，点描像を駆使して自由に u,v の変域を制限しているいるだけでなく，使っている関数はもっと広いからである．

しかし，u,v の変域を制限するのは容易ではない．このやりかたは大まかに言って三通りある．一つは u,v の変域を本当に制限するもの，もう一つは関数環の位相を考えるときに指定された u,v の変域の所で重みを大きくするやりかた，三番目は u,v に周期性の条件を置くなどして使われる関数族を制限してしまうやりかたである．

一番目が u,v の点描像を使って絶対的に束縛しているのに対して，二番目は謂わばポテンシャルの壁を設けて u,v の動き方を間接的に束縛するやりかた，三番目は使っている関数族全体で制限された変域を表現しようとしているのである．このやりかたは次章で非可換円柱という形で述べる．

6.1　ゲルファントの S-型関数の空間

この節では関数族を重みの付いた位相で縛ることを考えよう．その最も典型的なのがゲルファント(Gelfand)の S-型関数と呼ばれている関数族，つまり $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ に属する関数であり，変数を実数に束縛したときに急減少関数となるような関数族の部分族である．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の急減少関数全体とする．この節でこれの部分族を扱う．

6.1.1　S_a^b-型関数

この節の話はほとんど全部ゲルファント・シーロフ(Gel'fand-Shilov) [8] の教科書に従っているが，細かいところの定義の仕方とか記号は都合が良いように変えてある．まず，次のように定義しよう：

$0 < a, b < 1$ と $A, B > 0$ に対して $\mathbb{C}^2$ 上の正則関数 $f(x, y)$ が **$S_{a,A}^{b,B}$-型の関数**であるとは，f が任意の自然数の組 $k = (k_1, k_2), \ell = (\ell_1, \ell_2)$ に対し実軸上で次の不等式をみたす場合を言う：

$$\left|x^{k_1} y^{k_2} (\partial_x^{\ell_1} \partial_y^{\ell_2} f)(x, y)\right| \leq C A^{|k|} B^{|\ell|} |k|^{a|k|} |\ell|^{b|\ell|}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (6.1)$$

ただし $|k| = k_1 + k_2, |\ell| = \ell_1 + \ell_2$ であり，$0^0 = 1$ とする．a, b, A, B はきまっているので，C だけが f に依存する定数である．不等式の条件は実軸上でのみ課せられているのに，$\mathbb{C}^2$ 上の正則関数であることが要求されているのは不自然に見えるかもしれないが，実は実軸上で上の不等式をみたす関数は整関数なのである．それは，不等式(6.1)より

$$|(\partial_x^{\ell_1} \partial_y^{\ell_2} f)(0, 0)| \leq C_0 B^{|\ell|} |\ell|^{b|\ell|}$$

であるから，これに 1 章の不等式(2.17)をあてはめて ℓ_1, ℓ_2 を分離しておいて，f を原点でテイラー展開し収束半径を見ると，$b < 1$ より収束半径が各変数について ∞ であることが分かるからである．また，(6.1)の右辺は x, y によらないから，$S_{a,A}^{b,B}$-型の関数は全ての微分が任意の多項式をかけても有界である．したがって f を $\mathbb{R}^2$ に制限したものは急減少関数である．

$S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2)$ を $S_{a,A}^{b,B}$-型の関数全体のなす空間とする．これは加算個のセミノ

ルム系で定義されるフレッシェ空間である．

$S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2)$ は式(1.16)で使われている行列 A が $SL(2,\mathbb{R})$ に制限されているときのみ，こういう自己同型で不変である．ラフに言えば，我々は $SL(2,\mathbb{C})$-対称性をあきらめて，$SL(2,\mathbb{R})$-対称性を持つ空間にして，もっと色々な関数を含ませようとするわけである．$A \le A', B \le B'$ のとき次の包含関係は自明であろう：

$$S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2) \subset S_{a,A'}^{b,B'}(\mathbb{C}^2).$$

次のように空間を定義する：

$$S_{a,A+}^{b,B+}(\mathbb{C}^2) = \bigcap_{\varepsilon>0} S_{a,A+\varepsilon}^{b,B+\varepsilon}(\mathbb{C}^2), \quad S_a^b(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{A,B>0} S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2).$$

$S_{a,A+}^{b,B+}(\mathbb{C}^2)$ には射影極限位相を，$S_a^b(\mathbb{C}^2)$ には帰納極限位相を入れる．

$$T_a^b(\mathbb{C}^2) = \bigcap_{A,B>0} S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2)$$

と置き射影極限位相を入れておく．次のような空間も定義しておくと便利である：

$$T_{a+}^{b+}(\mathbb{C}^2) = \bigcap_{\varepsilon>0} T_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon}(\mathbb{C}^2).$$

$S_{a,A+}^{b,B+}(\mathbb{C}^2)$, $T_a^b(\mathbb{C}^2)$ は加算個のセミノルム系で定義されたフレッシェ空間である．お互いの関係は次のようなものである：

$$T_a^b(\mathbb{C}^2) \subset S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2) \subset S_{a,A+}^{b,B+}(\mathbb{C}^2) \subset S_a^b(\mathbb{C}^2) \subset T_{a+}^{b+}(\mathbb{C}^2).$$

しかし，証明はしないが，次も分かっている：

命題 6.1 $a+b<1$ のとき，$S_a^b(\mathbb{C}^2) = \{0\}$ である．

次の命題は [8] の Ch.IV, 2.3 そのままである：

命題 6.2 $0<a,b<1$ のとき S_a^b-型の関数の不等式 (6.1)をみたす実軸上の関数 f は複素平面 $\mathbb{C}^2$ 上に正則関数として一意的に拡張でき，さらに，正定数 C_f, C_f' が取れて，次の不等式をみたす

$$|f(x+i\xi, y+i\eta)| \le C\exp\left(-C_f(|x||y|)^{1/a} + C_f'|(\xi,\eta)|^{1/(1-b)}\right).$$

但し，$|(\xi,\eta)|^2=|\xi|^2+|\eta|^2$ である．

証明　整関数ということは分かっているから，評価式の方を示そう．命題 6.1 を考えれば，$0<a$, $0<b<1$, $a+b\geq 1$ の場合に証明すれば良い．$f(x+i\xi,y+i\eta)$ を点 (x,y) の所でテイラー展開し評価式を使うと

$$|x^{k_1}y^{k_2}||f((x+i\xi,y+i\eta)|\leq CA^{|k|}|k|^{a|k|}\sum\frac{|\xi|^{\ell_1}|\eta|^{\ell_2}}{\ell_1!\ell_2!}B^{|\ell|}|\ell|^{b|\ell|}.$$

ここで，$t\geq 0$ に対して $M_b(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}n^{bn}$ なる関数を定義しておくと，(2.17) 式を使って

$$|x^{k_1}y^{k_2}||f((x+i\xi,y+i\eta)|\leq CA^{|k|}|k|^{a|k|}M_b(eB|\xi|)M_b(eB|\eta|)$$

が分かるから，関数 $M_b(t)$ を評価する．まず，$M_b(t)$ の収束半径は ∞ で整関数となるが，実はこれが $\mathcal{E}_{1/(1-b)}(\mathbb{C})$ に属する関数である．つまり不等式 $M_b(t)\leq C''e^{C't^{1/(1-b)}}$ をみたす[注1]．従って

$$|x^{k_1}y^{k_2}||f((x+i\xi,y+i\eta)|\leq C_1A^{|k|}|k|^{a|k|}e^{C'eB|(\xi,\eta)|^{1/(1-b)}}$$

が分かる．

次に，上の式の両辺を $|x^{k_1}y^{k_2}|$ で割って (k_1,k_2) を動かして最小値を調べる．つまり，

$$|f((x+i\xi,y+i\eta)|\leq C_1\inf_{(k_1,k_2)}\frac{A^{|k|}|k|^{a|k|}}{|x^{k_1}y^{k_2}|}e^{C'eB|(\xi,\eta)|^{1/(1-b)}}$$

を考えるのだが，$\mu_a(s)=\inf_n\frac{n^{na}}{|s|^n}$ なる関数を定義しておくと，不等式(2.17)より

$$\inf_{(k_1,k_2)}\frac{A^{|k|}|k|^{a|k|}}{|x^{k_1}y^{k_2}|}\leq\mu_a(\frac{x}{eA})\mu_a(\frac{y}{eA})$$

であるから，$\mu_a(s)$ に注目する．

$a>0$ として[注2]，少し難しい計算だが次のことが分かる[注3]：

$$e^{-\frac{a}{e}|s|^{1/a}}\leq\mu_a(s)\leq C'e^{-\frac{a}{e}|s|^{1/a}},\quad C'=e^{\frac{ae}{2}}.$$

これを使うと正定数 C と f に依存する正定数 C_f, C'_f があって

$$|f(x+i\xi,y+i\eta)|\leq C\exp\left(-C_f(|x||y|)^{1/a}+C'_f|(\xi,\eta)|^{1/(1-b)}\right)\tag{6.2}$$

注1 このことは 2 章の評価式を使ってできる．

注2 $a=0$ のときは容易に

$$\mu_0(s)=\inf_k\frac{1}{|s|^k}=\begin{cases}1, & |s|\leq 1\\ 0, & |s|>1\end{cases}$$

が分かる．これは $f(x,y)$ の台が有界だと言っている．

注3 詳細は [8] p170. 2 章の評価式を使ってもできる．

が分かる.

次の評価式が $p > \frac{1}{1-b}$, $s > 0$ で成立する：

$$\exp\big(-\alpha(|x||y|)^{1/a} + \beta|(\xi,\eta)|^{1/(1-b)}\big) \leq C\exp\beta|(x+i\xi, y+i\eta)|^{1/(1-b)}$$
$$\leq C\exp s|(x+i\xi, y+i\eta)|^{p}.$$

これより，$S^b_a(\mathbb{C}^2) \subset \mathcal{E}_{\frac{1}{(1-b)}+}(\mathbb{C}^2)$ であり埋め込み写像は連続となる. □

さらに次も分かる：

補題 6.1 任意の多項式 $p(x), p(x,y)$ について

$$p(x)e^{-x^2}, \quad p(x,y)e^{-(x^2+y^2)} \in S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2)$$

である．さらに，任意の $f(x,y) \in \mathcal{E}_1(\mathbb{C})$ に対して $fe^{-(x^2+y^2)} \in S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2)$ である.

証明 $x^m e^{-\frac{1}{2}x^2} \in S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C})$ を示せば十分であろう.

$$\max|x^{m+k}e^{-\frac{1}{2}x^2}| = (m+k)^{(m+k)/2}e^{-\frac{1}{2}(m+k)}$$

より，$CA^k k^{\frac{1}{2}k}$ の形の評価が容易に得られるので，これを使ってやれば良い．$f(x,y) \in \mathcal{E}_1(\mathbb{C})$ に対しては結局 $e^{ax+by}e^{-(x^2+y^2)}$ の評価をすればよいことが分かるが，
$e^{ax+by}e^{-(x^2+y^2)} = e^{-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2}e^{\alpha^2+\beta^2}$ と変形すればよい. □

従って考えたい空間に調和振動子ぐらいは含ませることができる.

$\mathcal{F}$ をフーリエ変換を表す記号としよう：

$$(\mathcal{F}f)(s,t) = \int f(x,y)e^{i(sx+ty)}d\!\!\!{}^-x\,d\!\!\!{}^-y.$$

$d\!\!\!{}^-x$ 等は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$ の意味である.

教科書 [8] p.205 に書いてあることだが，フーリエ変換では微分と多項式の積が入れ替わるので次の補題は自然であろう：

補題 6.2 $0 < a, b < 1$, $a+b > 1$ の時，$\mathcal{F}S^{b,B+}_{a,A+}(\mathbb{C}^2) = S^{a,A+}_{b,B+}(\mathbb{C}^2)$ が成立する.

上の補題を示すには次のことが分かれば十分であろう：

補題 6.3 $0 < a, b < 1$, $a + b > 1$ の時，任意の $f \in S^{b,B}_{a,A}(\mathbb{C}^2)$ に対して，不等式

$$|(\partial_x^{\ell_1}\partial_y^{\ell_2}x^{k_1}y^{k_2}f)(x,y)| \le C(A+\varepsilon)^{|k|}(B+\varepsilon)^{|\ell|}|k|^{a|k|}|\ell|^{b|\ell|}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

が任意の $\varepsilon > 0$ で成立する．

証明　この証明は 2 章の評価式の証明と似ているが，$a + b > 1$ の条件がポイントである．式が長いので $x = x_1, y = y_2$ と置き，$k = (k_1, k_2)$ $k! = k_1!k_2!$, $\partial_x^j = \partial_{x_1}^{j_1}\partial_{x_2}^{j_2}$ 等という多重指標を用いて計算する：微分を実行して

$$S = \sum_{i+j=\ell} \frac{\ell!}{i!j!}\frac{k!}{(k-i)!}x^i\partial_x^j f(x)$$

と置けば，荒っぽく評価した $|\ell|^{|i|} \le |\ell+k|^{(1-b)|i|}|\ell|^{b|i|}$, $|k|^{|i|} \le |\ell+k|^{(1-a)|i|}|k|^{a|i|}$ を使うと

$$\begin{aligned}
|S| \le& C\sum_{i+j=\ell}\frac{1}{i!}|\ell|^{|i|}|k|^{|i|}A^{|k|}B^{|\ell|}|k|^{a|k-i|}|\ell|^{b|\ell-i|} \\
\le& C\sum_{i=0}^{\ell}\frac{1}{i!}|\ell+k|^{(1-a-b)|i|}A^{|k|}B^{|\ell|}|k|^{a|k|}|\ell|^{b|\ell|} \\
\le& C\exp(|\ell+k|^{(1-a-b)})A^{|k|}B^{|\ell|}|k|^{a|k|}|\ell|^{b|\ell|}
\end{aligned}$$

となるが，ここで $1 - a - b < 0$ を使うと，任意の $\delta > 0$ に対して C_δ があって，k, ℓ に無関係に

$$\exp(|\ell+k|^{(1-a-b)}) \le C_\delta e^{\delta|k+\ell|}$$

とできるので，$e^\delta A \le A + \varepsilon, e^\delta B \le B + \varepsilon$ となるように δ を取ればよい．　□

6.1.2　$*$-積代数

$0 < a, b < 1$, $a + b \ge 1$ とする．命題 6.2 より

$$S^b_a(\mathbb{C}^2) \subset \mathcal{E}_{\frac{1}{1-b}+}(\mathbb{C}^2)$$

である．対称性を遠慮したおかげで，次の定理が得られる：

定理 6.1 $0 < a, b < 1$, $a + b \ge 1$ ならば，$T^b_a(\mathbb{C}^2)$ 及び $S^b_a(\mathbb{C}^2)$ は $*$-積で閉じ，位相結合代数をなす．

証明 フーリエ変換を使って

$$f(u,v)=\int \hat{f}(s,t)e^{i(su+tv)}\,đs\,đt,\ \ g(u,v)=\int \hat{g}(s',t')e^{i(s'u+t'v)}\,đs'\,đt',$$

とすれば，$\hat{f}(s,t),\hat{g}(s',t')$ は急減少関数で，2 章 2.1 節の計算より，

$$f(u,v)*g(u,v)=\iint \hat{f}(s,t)\hat{g}(s',t')e^{\frac{\hbar i}{2}(st'-ts')}e^{i(s+s')u+i(t+t')v}\,đs\,đt\,đs'\,đt'$$

変数を式が対称になるように

$$\sigma=s+s',\ \sigma'=s-s',\ \tau=t+t',\ \tau'=t-t'$$

に変換すると

$$\begin{aligned}&f(u,v)*g(u,v)\\&=\frac{1}{4}\iint \hat{f}(\frac{\sigma-\sigma'}{2},\frac{\tau-\tau'}{2})\hat{g}(\frac{\sigma+\sigma'}{2},\frac{\tau+\tau'}{2})e^{\frac{\hbar i}{4}(\sigma'\tau-\tau'\sigma)}e^{i\sigma u+i\tau v}\,đ\sigma'\,đ\tau'\,đ\sigma\,đ\tau.\end{aligned}$$

この積分は $\hat{f},\hat{g}$ の**ひねり合成積**(twisted convolution)で，両者が急減少だから急減少関数に収束する．すると，積は次で与えられる：

$$f(u,v)*g(u,v)=h(u,v)=\int \hat{h}(\sigma,\tau)e^{i\sigma u+i\tau v}\,đ\sigma\,đ\tau.$$

結合律は積に関する上の積分表示より得られる．

定理の証明のためには，$\alpha>0$ があって，$f,g\in S^{b,B}_{a,A}(\mathbb{C}^2)$ のとき $f*g\in S^{b,\alpha B}_{a,\alpha A}(\mathbb{C}^2)$ となることが分かれば十分である．

式が長いので補題 6.3 のときと同様，$\sigma=\sigma_1,\tau=\sigma_2$ 等と置き，$u^k=u_1^{k_1}u_2^{k_2}$, $|\sigma|=|\sigma_1|+|\sigma_2|$, $\partial_\sigma^j=\partial_{\sigma_1}^{j_1}\partial_{\sigma_2}^{j_2}$ 等の多重指標を用いて計算する：補題 6.3 を考えて，次の式を評価する．部分積分で

$$|\partial_u^\ell(u^k h(u))|\le\int\Big|(i\sigma)^\ell(-i\partial_\sigma)^k\Big(\hat{f}\hat{g}\ e^{\frac{\hbar i}{4}(\sigma_1'\sigma_2-\sigma_2'\sigma_1)}\Big)\Big|\,đ\sigma_1'\,đ\sigma_2'$$

だから，次のことに注意して

$$\sigma^\ell=\Big(\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')+\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')\Big)^\ell$$

および微分の方を 2 項展開して荒っぽく評価するのだが，積分することを考慮して

$$S=(1+|\sigma'|^2)\Big|\sigma^\ell(\partial_\sigma)^k\Big(\hat{f}\hat{g}\ e^{\frac{\hbar i}{4}(\sigma_1'\sigma_2-\sigma_2'\sigma_1)}\Big)\Big|$$

の方を変数の入らない一様評価する．まず次のような評価式があることに注意する：任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\Big|(\frac{\sigma-\sigma'}{2})^m\partial^k\hat{f}(\frac{\sigma-\sigma'}{2})\Big|\le C(A+\varepsilon)^{|m|}(B+\varepsilon)^{|k|}|m|^{b|m|}|k|^{a|k|},$$

$$\Big|(\frac{\sigma+\sigma'}{2})^m\partial^k\hat{g}(\frac{\sigma+\sigma'}{2})\Big|\le C(A+\varepsilon)^{|m|}(B+\varepsilon)^{|k|}|m|^{b|m|}|k|^{a|k|}.$$

これを使って $\sigma' = \frac{1}{2}(\sigma'-\sigma) + \frac{1}{2}(\sigma'+\sigma)$ に注意し，$M = \int \frac{1}{1+|\sigma'|^2} d\!\!\!{}^-\sigma'$ として評価すると，結果は

$$|S| \le MC^2 \sum_{\substack{\alpha+\beta=\ell \\ i+j=k}} \frac{k!}{i!j!} \frac{\ell!}{\alpha!\beta!} (A+\varepsilon)^{|\ell|+2} (B+\varepsilon)^{|k|} (|\ell|+2)^{b(|\ell|+2)} |k|^{a|k|}$$

となるから，2項係数はそのまま総和でき，(2.17)を使って

$$|S| \le MC^2 2^{|k|+|\ell|} 2^{2b} e^{b|\ell|+2} (A+\varepsilon)^{|\ell|+2} (B+\varepsilon)^{|k|} |\ell|^{b|\ell|} |k|^{a|k|}.$$

これより，h がしかるべき所に入っていることが分かる．　□

6.1.3　複素真空による 真空表現

$z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$ とする．u, v を実軸に制限すると，$u^2 + v^2$ の離散描像として $\{\frac{1}{2}(2m+1); m \in \mathbb{N}\}$ を採用している局面では，複素真空 $\varpi_0 = 2e^{-\frac{1}{\hbar}z\bar{z}}$ は急減少関数としてよいであろう．$\varpi_0 \in S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2)$ である．

モイヤル積公式，または同じことだがエルミート積公式で計算すると

$$e^{s(u+iv)} * e^{t(u-iv)} = e^{-\hbar st} e^{(s+t)u+i(s-t)v}$$

だから，$i\sigma = s+t$, $\tau = s-t$ と置くと

$$e^{i\sigma u + i\tau v} = e^{-\frac{\hbar}{4}(\sigma^2+\tau^2)} e^{\frac{1}{2}(i\sigma+\tau)(u+iv)} * e^{\frac{1}{2}(i\sigma-\tau)(u-iv)}$$

となる．従って $f(u,v) = \int \hat{f}(\sigma,\tau) e^{i\sigma u + i\tau v} d\!\!\!{}^-\sigma d\!\!\!{}^-\tau$ のときには $\bar{z} * \varpi_0 = 0$ ということを反映して

$$\begin{aligned} f(u,v) * \varpi_0 &= \int \hat{f}(\sigma,\tau) e^{-\frac{\hbar}{4}(\sigma^2+\tau^2)} e^{\frac{1}{2}(i\sigma+\tau)z} d\!\!\!{}^-\sigma d\!\!\!{}^-\tau * \varpi_0 \\ &= \int \hat{f}(\sigma,\tau) e^{-\frac{\hbar}{4}((\sigma-\frac{iz}{\hbar})^2+(\tau-\frac{z}{\hbar})^2)} d\!\!\!{}^-\sigma d\!\!\!{}^-\tau * \varpi_0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

となり，$\hat{f}(\sigma,\tau)$ が $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ 程度の増大度のときには積分は収束し，整関数となる．

$\mathcal{H}(\mathbb{C})$ を整関数 $h(z)$ で $h(u+iv) * \varpi_0 \in S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2)$ となるもの全体とする．補題 6.1 より，$\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2) * \varpi_0 \subset S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2) * \varpi_0$ が分かり，$\varpi_0 * \varpi_0 = \varpi_0$ だから，$S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2) * \varpi_0 = \mathcal{H}(\mathbb{C}) * \varpi_0$ としてよいであろう．定理 6.1 より次のことが成立する：

定理 6.2 $(S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2), *)$ は空間 $\mathcal{H}(\mathbb{C}) * \varpi_0$ に正規表現される.

この節で述べた関数空間は生成元の動く範囲を実軸に束縛したものとは違う. 生成元の動く範囲はあくまで $\mathbb{C}^2$ 全体だが, 実軸に制限したときに急減少となる関数の空間である.

しかし, 我々の本来の目的からすれば実軸に制限したときに急減少となる関数空間ではまだまだ狭すぎるのである. 何かもう少し広い関数族で結合律を保つものが欲しいのである.

u の動く範囲を $\mathbb{R}$ に制限するということは, たとえば $\frac{1}{i-u}$ を仲間に入れるということである. しかし, これは $S^b_a(\mathbb{C}^2)$ の元ではないのである.

6.2 変数の制限(I)(実数への制限)

非可換変数を束縛することは一般には極めて難しい. 第一,「変数を束縛する」とは何をどうすることなのかはっきりしたきまりはない. しかし, 変数を束縛すると逆元が作りやすくなることを逆手にとって, このことをもって変数の束縛と考えることにする. つまり, x がどこかの集合 X 上を動く不定元と考えられているとき, **非可換変数 x を $A \subset X$ の中に束縛するとは, 任意の $a \notin A$ に対して $x - a$ の逆元 $(x-a)^{-1}$ を考えている代数に添加することであると**考える. つまり「u を実数に制限した」と言うことは,「任意の $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ に対して, $(u+a)^{-1}$ を仲間に入れた代数を考える」ことを意味する. このような定義であるから, 写像としての関数を考えているのではないことの結果として **u, v を実数に制限したからといって, $u * v$ が実数に制限されていることにはならない**ことに注意してもらいたい.

$C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 関数の全体としよう. 任意の滑らかな関数 f, g に対して f か g のどちらか一方が多項式ならば積 $f * g$ は定義できるのは明らかであろう. $(v+i)^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ である. 他方 $u' = u, v' = v + i$ は量子正準共役対だから $(v+i)^\circ = \frac{1}{v+i}(1 - e^{\frac{2i}{\hbar}u(v+i)})$ は $v+i$ の右逆元である.

一方モイヤル積公式 (1.10)での計算では

$$(v+i)^{-1} * (v+i) = (v+i) * (v+i)^{-1} = 1$$

である．従って，$(v+i)^{-1}$ は $*$-積の意味で $v+i$ の逆元である．$(u+i)^{-1}$ も同様である．$(v+i)^{-1}$ と $(v+i)^{\circ}$ とは同じ結合代数の中では扱えない訳である．実際モイヤル積公式で計算すると積

$$\frac{1}{v+i} * e^{\pm\frac{2i}{\hbar}u(v+i)} = \sum \frac{(-1)^k k!}{(v+i)^{(}k+1)} \frac{(\hbar i)^k}{k!2^k} \frac{(\pm 2i)^k}{\hbar^k} (v+i)^k e^{\frac{1}{\hbar}u(v+i)}$$

は発散する．

$(v+i)^{-1}$ を含む結合代数では真空 $\varpi_{0,i} = 2e^{\frac{2i}{\hbar}u(v+i)}, \bar{\varpi}_{0,i} = 2e^{-\frac{2i}{\hbar}u(v+i)}$ を使うことは禁止されなければならない．しかし，$\varpi_{00} = 2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$，$\bar{\varpi}_{00} = 2e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ を使うのはかまわないので，次の様に考えて，積を拡張して定義する：まず，$\frac{1}{v+i} * e^{\frac{2ti}{\hbar}uv}$ を計算すると $|\frac{vt}{v+i}| < 1$ の所では

$$\frac{1}{v+i} * e^{\frac{2ti}{\hbar}uv} = \frac{1}{v+i-vt} e^{\frac{2ti}{\hbar}uv} \tag{6.4}$$

となるから，解析接続により積を拡張して考えることにすれば，無条件に上のように定義して良いであろう．$v+i = vt$ の所に特異点があるように思うかもしれないが，$\frac{v+i}{v}$ は数とは考えないのだから t に関する特異点は無いと考えるべきである．容易に

$$\frac{1}{v+i} * e^{\frac{2i}{\hbar}uv} = -ie^{\frac{2i}{\hbar}uv}, \quad \frac{1}{v+i} * e^{-\frac{2i}{\hbar}uv} = \frac{1}{2v+i} e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$$

が分かる．

これで分かるように変数 u, v が動く範囲内の点に対応する真空は使って良いが，それ以外はダメのように思える．このことは逆に**使うべき真空を指定することで u, v の動く範囲を指定できる可能性**を示唆している．

さらにモイヤル積公式 (1.10)での計算では

$$(u+i)^{-1} * (v+i)^{-1} = \sum \frac{n!(-\hbar i)^n}{2^n} ((u+i)(v+i))^{-n-1}$$

となってこれも発散する．これは困ることだが，この節でフーリエ変換を使って積を定義しなおすと計算できることを示す．

さらに，次の式にも注意してもらいたい：

$$e^{tu} * f(u,v) * e^{-tu} = f(u, v - \hbar it)$$

$f = \frac{1}{\hbar i + v}$ として考えてみれば，これは v **を実軸に制限すると** $e^{itu}, t \in \mathbb{R}$ は

代数の仲間に入れて良いが，$e^{tu}, t \in \mathbb{R}$ は代数の仲間には入れられないことを意味する．同様のことが2次の指数関数の使用についても起こる．さらに次のことにも注意してもらいたい．u, v を実軸に制限したとしても，それは $uv = \frac{1}{2}(u * v + v * u)$ について，$(it + uv)^{-1}$ が任意の $t \neq 0$ について存在することを意味するわけではないということである．$t \neq 0$ で $(it+u)^{-1}$, $(it+v)^{-1}$ があったとしても，それが $(it+uv)^{-1}$ の存在を意味するのではないからである．

6.2.1　フーリエ変換による $*$-積の定義

変数 u, v を実数に制限すると任意の $s, t \in \mathbb{R}$ について $|e^{i(su+tv)}| = 1$ である．このことを使って $*$-積の定義を拡張することを考えよう．

ワイル順序表示の場合

積公式 (1.10)を使うと 2.1 節の計算より

$$e^{isu+itv} * e^{is'u+it'v} = e^{\frac{\hbar i}{2}(st'-ts')} e^{i(s+s')u+i(t+t')v}$$

だから，フーリエ変換が分かれば，ひねり合成積を使って積を拡張することができる．ひねり合成積は下のように書くこともでき，普通の合成積と同様に次の定理が成立する：

定理 6.3　$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\hat{g} \in L^p(\mathbb{R}^2), p \geq 1$ ならば，ひねり合成積

$$(\hat{f} \hat{*} \hat{g})(s,t) = \int \hat{f}(s',t')\hat{g}(s-s',t-t') e^{\frac{\hbar i}{2}(s't-t's)} \bar{d}s' \bar{d}t'$$

は $L^p(\mathbb{R}^2)$ の元であり，$\|\hat{f} \hat{*} \hat{g}\|_p \leq \|\hat{f}\|_1 \|\hat{g}\|_p$ が成立する．普通の合成積と違って $\hat{f} \hat{*} \hat{g} \neq \hat{g} \hat{*} \hat{f}$ であるが，しかし，$\overline{\hat{f} \hat{*} \hat{g}} = \overline{\hat{g}} \hat{*} \overline{\hat{f}}$ が成立する．

これよりフーリエ変換の一意性を使って，次のことが分かる：

系 6.1　$\mathcal{F}L^1$ を可積分関数のフーリエ像の全体とすると，ひねり合成積を使って $*$-積は空間 $\mathcal{F}L^1$ に定義され，

$$(f * g)(u,v) = \int (\hat{f} \hat{*} \hat{g})(s,t) e^{e^{isu+itv}} \bar{d}s \bar{d}t$$

となり，結合代数をなす．

結合律の見るのは難しくない．上のような計算がやれるのは u, v を実数に制限したために，$|e^{i(su+tv)}| = 1$ となっているからである．

そうなると，実数に制限されているときにモイヤル積公式 (1.10)を使うのは良くないわけで，フーリエ変換とひねり合成積を使って計算する公式に書き換えておかないといけない．

正規順序表示の場合

同じことが，正規順序表示を使っても考えられる．正規順序表示では

$$e^{isu+itv} * e^{is'u+it'v} = e^{-\hbar its'} e^{i(s+s')u+i(t+t')v}$$

だから，f, g がフーリエ変換を使って

$$f(u,v) = \int \hat{f}(s,t)e^{i(su+tv)}\bar{d}s\bar{d}t, \, g(u,v) = \int \hat{g}(s',t')e^{i(s'u+t'v)}\bar{d}s'\bar{d}t'$$

のように与えられていると，$*$-積は

$$f(u,v) * g(u,v) = \iint \hat{f}(s-s',t)\hat{g}(s',t-t')e^{-\hbar it's'}e^{i(su+tv)}\bar{d}s'\bar{d}t'\bar{d}s\bar{d}t$$

で与えられる．これについてもワイル順序表示の場合の定理 6.3 と同様のことが成り立つ．

フーリエ 変換に関係する性質のまとめ

フーリエ変換は超関数まで拡張されて定義できるが，これがどの程度の関数族に属するかの判定をする為に色々な注意がいる．それをまとめておこう：

$\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ をフーリエ変換，フーリエ逆変換の記号とする．フーリエ変換はソボレフ(Sobolev)空間族と呼ばれる次のような関数族で考えるほうが適している：$x_1, \cdots, x_n$ を $\mathbb{R}^n$ の座標関数とし $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ という多重指標を用いることにする．

$H^s(\mathbb{R}^n)$ を超関数としての s 階までの微分がすべて $L_2(\mathbb{R}^n)$ に属する L_2-関数の全体とする($H^0(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$)．$H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ を $H^s(\mathbb{R}^n)$ の L_2-内積に関する双対空間とする．さらに，

$$W_r^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in H^s(\mathbb{R}^n); x^\alpha f \in H^s(\mathbb{R}^n), \ |\alpha| \leq r\}, \quad W_0^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$$

としよう．$\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数族 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_m W_m^m(\mathbb{R}^n)$$

として定義される．さらに

$$W_r^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_s W_r^s(\mathbb{R}^n), \quad W_\infty^s(\mathbb{R}^n) = \bigcap_r W_r^s(\mathbb{R}^n)$$

とする．

(1) $\mathcal{F}L_2(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$ であり，$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ が成立する．これは $\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ が等長的だと言っている式であり，パーセバル(Parseval)の等式と呼ばれている．

(2) $\mathcal{F}W_r^s(\mathbb{R}) = W_s^r(\mathbb{R})$ であり，

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(f), \quad \mathcal{F}((-ix)^\alpha f) = D_\xi^\alpha \mathcal{F}(f).$$

(3) L_2 内積に関する $W_r^s(\mathbb{R}^n)$ の双対空間を $W_{-r}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ とすると，$\mathcal{F}$ は(1)の写像の双対写像として $W_{-r}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ に定義される．

(4) $\prod_{i=1}^n (1+x_i^2)^{-1} \in L_1(\mathbb{R}^n)$．これを利用すると，$W_{2n}^0(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ で埋め込み写像は連続．

(5) $H^{p+[n/2]+1}(\mathbb{R}^n) \subset B^p(\mathbb{R}^n)$．但し，$B^p(\mathbb{R}^n)$ は p 階までの微分がすべて有界で連続となる関数の全体である．

これらを使って $\frac{1}{i+u} * \frac{1}{i+v}$ を定義しよう．

$$\frac{1}{i+u} = \int \hat{f}(s) e^{isu} đs, \quad \frac{1}{i+v} = \int \hat{g}(t) e^{itv} đt$$

とする．$\frac{1}{i+u}, \frac{1}{i+v} \in H^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap H^s(\mathbb{R})$ だから，$\hat{f}(s), \hat{g}(t)$ は(2)により $W_\infty^0(\mathbb{R}) = \bigcap_m W_m^0(\mathbb{R})$ に属する．

$$\frac{1}{i+u} * \frac{1}{i+v} = \iint \hat{f}(s)\hat{g}(t) e^{-\hbar ist} e^{isu+itv} đsđt$$

としたい．$\hat{f}(s)\hat{g}(t)e^{-\hbar ist} \in W_\infty^0(\mathbb{R}^2)$ により $\frac{1}{i+u} * \frac{1}{i+v}$ は $W_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元として定義される．(5)を使えばこれが $B^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元であることが分かる．$\hat{f}(s), \hat{g}(t) \notin L_1(\mathbb{R}^2)$ だから，定理 6.1 をそのまま当てはめているのではないことに注意してもらいたい．

真空のフーリエ 変換

ここで，真空 $\varpi_{00} = 2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ のフーリエ像

$$\iint 2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}e^{-isu-itv}\bar{d}u\bar{d}v = \iint 2e^{\frac{2i}{\hbar}(uv-\frac{\hbar}{2}(su+tv))}\bar{d}u\bar{d}v$$

を計算しておく．

$$\frac{2i}{\hbar}(uv - \frac{\hbar}{2}(su+tv)) = \frac{2i}{\hbar}(u - \frac{\hbar t}{2})(v - \frac{\hbar s}{2}) - \frac{\hbar i}{2}st$$

により，積分変数を変換するとフーリエ像は

$$= 2e^{-\frac{\hbar i}{2}st}\iint e^{\frac{2i}{\hbar}u'v'}\bar{d}u'\bar{d}v'.$$

$\int e^{\frac{2i}{\hbar}u'v'}\bar{d}u' = \delta(\frac{2}{\hbar}v')$ としているから，これを積分して，ϖ_{00} のフーリエ像は $\hbar e^{-\frac{\hbar i}{2}st}$ となる．従って

$$\varpi_{00} = \iint \hbar e^{-\frac{\hbar i}{2}st}e^{isu+itv}\bar{d}s\bar{d}t \tag{6.5}$$

となる．$e^{itv} * e^{isu} = e^{-\frac{\hbar i}{2}st}e^{isu+itv}$ を用いれば

$$\varpi_{00} = \int e^{itv}\bar{d}t * \int e^{isu}\bar{d}s = \hbar\delta(v) * \delta(u) \tag{6.6}$$

のように書いてもよいだろう．

δ-関数の次のような性質に注意を向けて欲しい：$m > 0$ の自然数に対して $v^m * \delta(v) = v^m\delta(v) = 0$ だから，微分を繰返して，

$$v^m * \delta^{(m)}(v) = (-1)^m m!\delta(v), \quad v^k * \delta^{(m)}(v) = 0, \quad (k > m) \tag{6.7}$$

が得られる．

6.3　振動積分

この節で正規順序表示，ワイル順序表示それぞれに応じて次の様な積分形で書かれる積を定義する：

$$f * g(x,y) = os\text{-}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y+\hbar t)g(x+s', y)e^{its'}\bar{d}t\bar{d}s', \tag{6.8}$$

$$f{*}g(x,y) = \\ os\text{-}\iint_{\mathbb{R}^4} f(x+\frac{\hbar}{2}s,\ y+\frac{\hbar}{2}t)g(x+s',\ y+t')e^{i(ts'-st')}\bar{d}s\bar{d}t\bar{d}s'\bar{d}t' \tag{6.9}$$

$os\text{-}\iint$ は**振動積分**と呼ばれるもので，テイラー展開，逐次部分積分を通じて計算するものである．ここでは $\bar{d}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}ds$ のような記号を使っている．この形から $f, g \in L_1(\mathbb{R}^2)$ ならば右辺の積分に意味があることが分かる．

正規順序表示の場合

まず，計算のしかたを説明しよう．超関数の計算公式では部分積分で

$$\int t^n e^{its'}\bar{d}t = (-i\partial_{s'})^n \int e^{its'}\bar{d}t = (-i\partial_{s'})^n \delta(s')$$

だから[注4]，

$$os\text{-}\iint t^q g(x,y,s')e^{its'}\bar{d}t\bar{d}s' = \int g(x,y,s')(-i\partial_{s'})^q\delta(s')\bar{d}s'$$

とし，部分積分で

$$os\text{-}\iint t^q g(x,y,s')e^{its'}\bar{d}t\bar{d}s' = (i\partial_{s'})^q g(x,y,0)$$

と計算する．これは証明不要の約束事だと思っていてよいが部分積分の公式がそのまま使えるようにしてあるところが味噌である．これを約束事として $f(x,\ y+\hbar t)$ を t について有限次数のテイラー展開をする：

$$f(x,\ y+\hbar t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\partial_y^j f(x,y)(\hbar t)^j + \hbar^k t^k \tilde{f}_k(x,y,t)$$

$\tilde{f}_k$ は剰余項である．これを代入し，部分積分で t^j の部分を

$$(i\partial_{s'})^j g(x+s',\ y)$$

に置き換えて計算する．これも約束事である．結果は

$$f{*}g(x,y) = \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(\hbar i)^q \partial_y^q f(x,y)\partial_x^q g(x,y) \\ + \hbar^k \int \tilde{f}_k(x,y,t)(i\partial_{s'})^k g(x+s',y)e^{its'}\bar{d}t\bar{d}s'$$

注4 $\int e^{its'}\bar{d}t = \delta(s')$ としているので注意．

のようになる．剰余項にあたるところは何回か微分されてしまうので，微分すればするほど性質の良くなる(積分しやすくなる)ような関数空間を設定すればこれで計算ができる．剰余項以外の所は ΨDO-積公式そのものである．振動積分 $os\text{-}\iint$ とはこのようなルールで計算する積分のことであり，これは ΨDO-積公式の拡張と見なせる．

6.3.1　ヘルマンダーの表象族 $S^m_{\rho,\delta}$ と真空表現

この節では正規順序表示で計算したときに結合律が成立するヘルマンダー(Hörmander)の**表象族**と呼ばれる関数族を考える．前と同様，空間 $\mathbb{R}^2$ を考え，x, y を $\mathbb{R}^2$ の通常の座標関数としよう．m は自然数，ρ, δ は $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ をみたす正定数とする．

$S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 関数 $f(x,y)$ で任意の自然数 k, ℓ に対して定数 $C_{k,\ell}$ があって，

$$|\partial_x^k \partial_y^\ell f(x,y)| \leq C_{k,\ell}\sqrt{1+|y|^2}^{\,m-\ell\rho+k\delta}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

が成立するようなものの全体とする．x と y とには完全に違う役割が与えられている．

$B^\infty(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の有界な C^∞ 関数ですべての微分も有界なものの全体とする．漸近展開

$$f(x,y) \sim \sum_{k \geq -m} a_k(x) y^{-k}, \quad a_k \in B^0(\mathbb{R})$$

を持つような関数は $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^2)$ の元である．ΨDO-積公式 (6.8)を思い出すと，容易に

$$S^k_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2) * S^\ell_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2) \subset S^{k+\ell}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2)$$

が分かる．つまり，対称性を破って，実数に制限したおかげで，$*$-積は結合律を保ったまま $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2)$ まで広がるのである．

擬微分作用素

$\varpi_{00}=e_\circ^{\frac{i}{\hbar}xy}\notin S^k_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2)$ ではあるが，$e_\circ^{ity}*\varpi_{00}=\varpi_{00}$ だから，$f(x,y)=\int\hat{f}(x,t)e^{ity}\bar{d}t$ とすれば，

$$f_\circ(x,y)*\varpi_{00}=\int\hat{f}(x,t)e^{ity}\bar{d}t*\varpi_{00}=\int\hat{f}(x,t)\bar{d}t*\varpi_{00}=f_\circ(x,0)*\varpi_{00}$$

となることに注意する．

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ を台がコンパクトな C^∞ 関数の全体とし，$C_0^\infty(\mathbb{R})*\varpi_{00}$ から $C^\infty(\mathbb{R})*\varpi_{00}$ への作用素を次のように定義する：$a(x,y)_\circ\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2)$ に対し

$$P(a):\ h(x)*\varpi_{00}\to a(x,y)_\circ*h(x)*\varpi_{00},\quad h\in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

とする．すると，(6.8)式より

$$(P(a)h)(x)=os\text{-}\int a_\circ(u,\hbar t)h_\circ(u+s')e^{its'}\bar{d}t\bar{d}s*\varpi_{00}$$

となるが，これはヘルマンダー [10] の定義した ΨDO（擬微分作用素）と同じである．$P(a)$ は任意の s について $H^s(\mathbb{R})$ から $H^{s-m}(\mathbb{R})$ への連続線型作用素に一意的に拡張される．$a*b$ を ΨDO-積公式で計算した積とすると，$P(a)P(b)=P(a*b)$ が成立する．

6.3.2 ワイル順序表示の場合

今度はワイル順序表示で考えよう．前と同様，超関数の計算公式では部分積分で

$$\int\frac{1}{2^{m+n}}s^mt^ne^{i(ts'-st')}\bar{d}s\bar{d}t=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{m+n}(-i\partial_{s'})^n(i\partial_{t'})^m\int e^{i(ts'-st')}dsdt$$
$$=\Big(\frac{i}{2}\Big)^{m+n}(-\partial_{s'})^n(\partial_{t'})^m\delta(s',-t')$$

だから，

$$os\text{-}\iint\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p+q}s^pt^qg(x,y,s',t')e^{i(ts'-st')}dsdt\bar{d}s'\bar{d}t'$$
$$=\int g(x,y,s',t')\Big(\frac{i}{2}\Big)^{p+q}(-\partial_{s'})^q(\partial_{t'})^p\delta(s',-t')\bar{d}s'\bar{d}t'$$

とし，部分積分で

$$os\text{-}\iint s^p t^q g(x,y,s',t') e^{i(ts'-st')} ds\,dt\,ds'\,dt' = \left(\frac{i}{2}\right)^{p+q}(\partial_{s'})^q(-\partial_{t'})^p g(x,y,0,0)$$

と計算する．これも証明不要の約束事だと思っていてよい．$f(x+\frac{\hbar}{2}s,\ y+\frac{\hbar}{2}t)$ を k 次までテイラー展開をする：

$$f\left(x+\frac{\hbar}{2}s, y+\frac{\hbar}{2}t\right) = \sum_{i+j<k}\frac{1}{i!j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}\partial_x^i\partial_y^j f(x,y)(\hbar s)^i(\hbar t)^j + \hbar^k\sum_{i+j=k}s^i t^j \tilde{f}_{ij}(x,y,s,t)$$

$\tilde{f}_{ij}$ は剰余項である．これを代入し，部分積分で $s^i t^j$ の部分を

$$(i\partial_{s'})^j(-i\partial_{t'})^i g(x+s',\ y+t')$$

に置き換えて計算する．これも約束事である．結果は

$$f*g(x,y) = \sum_{p+q<k}\frac{1}{p!q!}\left(\frac{\hbar i}{2}\right)^{p+q}\partial_x^p\partial_y^q f(x,y)\partial_x^q(-\partial_y)^p g(x,y) + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k\sum_{i+j=k}\int \tilde{f}_{ij}(x,y,s,t)(\partial_{s'})^q(-\partial_{t'})^p g(x+s',y+t') \times e^{i(st'-ts')} ds\,dt\,ds'\,dt'$$

のようになる．剰余項にあたるところは何回か微分されてしまうので，微分すればするほど性質の良くなる(積分しやすくなる)ような関数空間を設定すればこれで計算ができる．剰余項以外の所はモイヤル積公式 (1.10)そのものである．

6.3.3　表象族 $\Sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ と真空表現

まず空間 $\mathbb{R}^2$ を考え，x, y を $\mathbb{R}^2$ の通常の座標関数としよう．

$$(x,y) = \rho\omega, \quad \omega \in S^1(1)$$

と考える．ただし，$S^1(1)$ は半径 1 の円周である．$S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^2)$ の場合と違って x, y は対等に扱われている．

次数 m の**古典的表象族**あるいは**ワイル型表象族**と呼ばれる，次のような $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 関数からなる族 $\Sigma^m(\mathbb{R}^2)$ $(m \in \mathbb{Z})$ を定義しよう：

$t=0$ の周りで $\phi(t)=0$, $t>1/2$ で $\phi(t)=1$ となる cut-off 関数を $\phi(t)$ とする．f が $\Sigma^m(\mathbb{R}^2)$ の元であると言うのは任意の自然数 $k \le m$ に対して，$S^1(1)$ 上の C^∞-関数列 $f_m, f_{m-1}, \cdots, f_k$ で

$$\phi(\rho)(f - f_m\rho^{\frac{m}{2}} - f_{m-1}\cdot\rho^{\frac{m-1}{2}} - \cdots - f_k\cdot\rho^{\frac{k}{2}})\cdot\rho^{-\frac{k+1}{2}}$$

が $\mathbb{R}^2$ 上 C^∞ かつ有界となる場合である．但し $\rho^{-\alpha}$ は普通の可換積 $\cdot$ による逆元である．

このことを次の記号

$$f \sim f_m\rho^{\frac{m}{2}} + f_{m-1}\cdot\rho^{\frac{m-1}{2}} + \cdots + f_k\cdot\rho^{\frac{k}{2}} + \cdots, \quad f_k = f_k(p) \in C^\infty(S^1(1))$$

で表す．右側は f の**漸近展開**と呼ばれる．次の様に置く：

$$\Sigma^{-\infty}(\mathbb{R}^2) = \bigcap_m \Sigma^{-m}(\mathbb{R}^2), \quad \Sigma^{\infty}(\mathbb{R}^2) = \bigcup_m \Sigma^{m}(\mathbb{R}^2).$$

$\Sigma^0(\mathbb{R}^2)$ の位相は次のように与えられる：任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\Sigma^0(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{k=0}^{m} C^\infty(S^1)\phi(\rho)\rho^{-\frac{k}{2}} \oplus \Sigma^{-(m+1)}(\mathbb{R}^2)$$

のように直和分解ができることを使って，それぞれの空間に一様 C^∞ 位相を入れ，その直積位相 T_m を上の空間に入れる．そうしておいて射影極限位相 $\varprojlim T_m$ を $\Sigma^0(\mathbb{R}^2)$ に入れる．$\Sigma^0(\mathbb{R}^2)$ は完備位相線型空間で $\Sigma^{-\ell}(\mathbb{R}^2)$ を閉部分空間として含む．

$\Sigma^m(\mathbb{R}^2)$ $(m>0)$ を $\Sigma^0(\mathbb{R}^2)(\phi(\rho)\rho)^m$ と線型的に同一視して位相を入れ帰納極限位相で $\Sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ を考える．

特に，次のことに注意する：上の振動積分による $*$-積は任意の $f, g \in \Sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$，任意の $\hbar \in \mathbb{R}_+$ について定義されている．

定理 6.4 積公式は次の積分で与えられる：

$$(a*b)(x,y) =$$
$$os\text{-}\frac{1}{\hbar^2}\iint a\left(x+\frac{1}{2}s, y+\frac{1}{2}t\right) b(x+\sigma, y+\tau) e^{\frac{i}{\hbar}(s\tau - t\sigma)} d\!\!{}^-s\, d\!\!{}^-t\, d\!\!{}^-\sigma\, d\!\!{}^-\tau.$$

式の形は $\hbar \in \mathbb{R} - \{0\}$ でないと意味をなさないようになっているが(6.9)式のように変数変換で書き直せる．後で述べるベレーズィン(Berezin)表現と違って $\hbar$ まで作用素表現されているというわけではない．さらに，次のことが成立する：

補題 6.4 $\Sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ は $*$-積に関して結合代数であり，$f * g$ は $\hbar \in \mathbb{R}_+$ についても C^∞ である．特に，次が成立する：

$$\Sigma^k(\mathbb{R}^2) * \Sigma^l(\mathbb{R}^2) \subset \Sigma^{k+l}(\mathbb{R}^2).$$

$\hbar = 0$ でテイラー展開をすれば積公式は

$$f * g \sim f e^{\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_x} \wedge \overrightarrow{\partial_y}} g \tag{6.10}$$

である．式 (6.10)より次のように述べても良いであろう：

命題 6.3 $*$-積は $\Sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\hbar \in \mathbb{R}_+$ まで拡張され結合律をみたす．

積公式を少し詳しく見ると

$$[\Sigma^k(\mathbb{R}^2), \Sigma^l(\mathbb{R}^2)] \subset \Sigma^{k+l-2}(\mathbb{R}^2)$$

である．特に，$\Sigma^2(\mathbb{R}^2)$ は交換子積に関してリー代数となる．

ワイル型擬微分作用素

$f(x,y)$ がフーリエ変換を使って

$$f(x,y) = \iint \hat{f}(s,t) e^{isx} e^{ity} \,ds\,dt \tag{6.11}$$

と与えられているときには，逆モイヤル積公式を使うと

$$\begin{aligned} f(x,y) * \varpi_{00} &= \iint \hat{f}(s,t) e^{-\frac{i\hbar}{2}st} e^{isx} * e^{ity} \,ds\,dt * \varpi_{00} \\ &= \iint \hat{f}(s,t) e^{-\frac{i\hbar}{2}st} e^{isx+it0} \,ds\,dt * \varpi_{00} \\ &= (e^{\frac{i\hbar}{2}\partial_x\partial_y} f)(x,0) * \varpi_{00} \end{aligned} \tag{6.12}$$

が分かる．これは $(s,t) = (0,0)$ でのテイラー展開を使って書けば，

$$f(x,y)*\varpi_{00} = os\text{-}\int f\big(x+\frac{1}{2}s,t\big)e^{\frac{i}{\hbar}st}\,đs\,đt * \varpi_{00}$$

とも書かれる．(6.12)式と部分積分を使って次のことが分かる：

補題 6.5

$$f(x,y)*\varpi_{00} = os\text{-}\iint f\big(x+\frac{x'}{2},y'\big)e^{\frac{i}{\hbar}x'y'}\,đx'đy' * \varpi_{00}$$

これらをもとにして次のように計算する：$a(x,y)$ を(6.11)式のように与えられた関数とする．任意の $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して，式(1.10)と(6.12)式を使って，

$$\begin{aligned}
a(x,y)*u(x)*\varpi_{00} &= \sum_k \Big(\frac{1}{k!}\big(\frac{\hbar i}{2}\partial_y\big)^k a(x,y)\cdot \partial_x^k u(x)\Big) * \varpi_{00} \\
&= \sum \iint \big(\frac{1}{k!}\big(\frac{\hbar i}{2}\partial_y\big)^k a\big(x+\frac{x'}{2},y'\big)\cdot \partial_x^k u\big(x+\frac{x'}{2}\big)\big)e^{\frac{i}{\hbar}x'y'}\,đx'đy' * \varpi_{00} \\
&= os\text{-}\iint a\big(x+\frac{\tilde{x}'}{2},y'\big)u(x+x')\cdot e^{\frac{i}{\hbar}x'y'}\,đx'đy' * \varpi_{00}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

が得られる．これはヘルマンダー [11] の定義したワイル型の擬微分作用素である．

(6.13)式を見て，任意の $f \in \Sigma^k(\mathbb{R}^2)$ に対してワイル型の擬微分作用素[注5]を次の式で定義する：

$$P(f) : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$$

$$(P(f)u)(x) := \iint_{R^2} f\big(\frac{x+x'}{2},y\big)e^{\frac{i}{\hbar}(x-x')y}u(x')\,đx'đy.$$

$P(f)$ は任意の s について $W_s^s(\mathbb{R})$ から $W_{s-k}^{s-k}(\mathbb{R})$ への連続線型作用素に一意的に拡張される．$a*b$ をモイヤル積公式で計算した積とすると，$P(a)P(b) = P(a*b)$ が成立する．

任意の $f \in \Sigma^k(\mathbb{R}^2)$, $g \in \Sigma^l(\mathbb{R}^2)$ に対して積 $P(f)P(g)$ は再び次数 $k+l$ の擬微分作用素となることが分かっている：つまり $P(f)P(g) = P(h)$ となるような $h \in \Sigma^{k+l}(\mathbb{R}^2)$ がただ一つ定まる．$h = f*g$ である．

注5 これはヘルマンダー型の ψDO と混同しないように願いたい．

6.4　変数の制限 (II)

これまでは実数への制限だったが，今度はワイル代数の中で v の動く範囲を $\mathbb{C}-\{0\}$ に制限したくなったとしてみよう．この場合「v を $\mathbb{C}-\{0\}$ に制限している」ということを代数的に述べようとすれば「v^{-1} を添加する」と言うしかあるまい．このようなことを行うとどのようなことになるかこの節で考えよう．

まず思いつくのは，v^{-1} を要求すると ϖ_{00} を 0 としなければならくならないかということだが，その心配は不要で，単に $v^{\bullet}, v^{\circ}, \varpi_{00}$ を使うと結合律が破れたり，積が定義できなくなったりするだけである．

しかし，次のようにもなる：$u+iv$ を正規順序表示で考えると，2 章の定理2.3 で見たように任意の $c\in\mathbb{C}$ で $c+u+iv$ は可逆(絶対可逆)だから，複素平面上の点はすでにすべて除かれている．つまり $u+iv$ **を正規順序表示で考えるということは無限遠点以外をすべて除く(すべて漸近展開で考える)ことを意味する**のである．

6.4.1　$v\neq 0$ への制限

$\mathbb{C}_*=\mathbb{C}-\{0\}$ として，$\mathbb{C}\times\mathbb{C}_*$ 上で $*$-積を考える．u は $\mathbb{C}$ を，v は $\mathbb{C}_*$ を動く不定元と考えたいのである．

$\mathbb{C}[u,v,v^{-1}]$ を u,v,v^{-1} の多項式全体とする．$*$-積がここに拡張して定義されることは明らかであろう．これがどのような所まで拡張できるか，この節で考える．

$e_*^{itu}*f_*(v)*e_*^{-itu}=f_*(v+t\hbar)$ であるから，$e_*^{tu}, t\in\mathbb{C}$ が入っている代数に v^{-1} を添加すると，v は絶対可逆つまり任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ に対して $(\zeta-v)^{-1}$ が存在するとしなければならない．前に注意したようにこれは v に関しての点が $v^{-1}=0$ のみであることを意味するから，v^{-1} で形式的に展開した元のみを考えないといけなくなる．次のようなことができないといけないからである：

$$(v-\zeta)^{-1}=\frac{1}{v}(1-\frac{\zeta}{v})=\frac{1}{v}\sum_k(\frac{\zeta}{v})^k.$$

v より v^{-1} の方が主役になるので，基本関係式は $[u, v^{-1}] = \hbar i v^{-2}$ の様になるのである．$\mathbb{C}[u,v][[v^{-1}]]$ を $\mathbb{C}[u,v]$ を係数環とする v^{-1} の形式的冪級数の全体とすると，上の基本関係式を使って $\mathbb{C}[u,v][[v^{-1}]]$ に結合代数としての $*$-積が定義される．(しかし，v^{-1} の形式的冪級数全体を考えなければいけないという訳ではない.)

しかし絶対可逆元というのはいわばSpecが空集合のような元だから，これが自己共役作用素に表現されることはないし，自己共役性をやめても作用素に表現するのは難しいと思われる．

6.4.2 コーエン・ランキン(Cohen-Rankin)積

前にモイヤル積公式について述べたが，ここではそれと少し思想が違う，コーエン・ランキン積と呼ばれている積を導入しよう．しかし，無論モイヤル積公式と深い関係があるので，ここではオプシエンコ(Ovsienko) [26] に従って，そちらの方向から導入する．

前節とは x, y, u, v の立場を入れ換えているが，まず $\mathbb{C}[u, v, v^{-1}, \hbar]$ にモイヤル積(1.10)の入った代数を考え，そこで

$$x = \frac{u}{v}, \quad y = \frac{1}{2}v^2$$

と置き，これと $\hbar$ で生成される代数を $(\mathbb{C}[u, v, v^{-1}, \hbar]; *_0)$ とする．

この代数は，v は可逆としているので u, v について対称でない．このようなところで結合律が成立するぎりぎりの所を捜すとこれまでと少し違ったものが得られると思われる．

以下では，$e_*^{itu}, t \in \mathbb{C}$ を含んだ結合代数を考える．これは v を絶対可逆元として扱うことを意味する．

定理 6.5 積公式は x, y で書けば，次で与えられる：

$$fy^m * gy^n = \sum_{k\geq 0} \hbar^k J_k^{m,n}(x)(f,g)y^{m+n-k}, \quad \text{(cf.[26])} \tag{6.14}$$

ただし，少々紛らわしい記号だが

$$J_k^{m,n}(x)(f,g)=\sum_{i+j=k}\frac{\sqrt{-1}^k}{2^{2k}k!}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{(2m-i)!}{(2m-k)!}\frac{(2n-j)!}{(2n-k)!}f^{(i)}g^{(j)} \tag{6.15}$$

である．

証明　まず，(6.15)の公式はモイヤル積公式 (1.10)に似せて次のようにも書ける：$h(y),\tilde{h}(y)\in\mathbb{C}[y,y^{-1}]$ として，

$$\begin{aligned}&(f(x)h(y)*(g(x)\tilde{h}(y))\\&=\sum_k\frac{(\hbar i)^k}{2^k}\sum_{i+j=k}\frac{(-1)^i}{i!j!}(\sqrt{2y}\partial_y)^j(\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_x)^i(fh)(\sqrt{2y}\partial_y)^i(\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_x)^j(g\tilde{h})\end{aligned} \tag{6.16}$$

$\sqrt{2y}$ は $\mathbb{C}[y,y^{-1}]$ の元ではないが，$\sqrt{2y}$ を形式的に使って $\mathbb{C}[y,y^{-1}]$ に働く作用素 $(\sqrt{2y}\partial_y)^j(\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_x)^i$ を考えている．　□

明らかにこの代数は (x,y) 対称性を持っていない．v を絶対可逆としたので，以下の計算では y^{-1} に関して形式的な計算しかしない．

$\sqrt{2y}\partial_y$ と $\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_x$ は可換でないからモイヤル型の計算の時に困るので，上の式の $\sqrt{2y}\partial_y$ の部分を $\sqrt{2y}\partial_y-\frac{x}{\sqrt{2y}}\partial_x$ で置き換える．こうやっても結果は変わらないし，

$$[\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_x,\sqrt{2y}\partial_y-\frac{x}{\sqrt{2y}}\partial_x]=0$$

も得られる．結合律は y^{-1} で形式的に展開しているので成立する．式(6.16)の左辺で $fh=e^{s\sqrt{2y}x}h(y)$, $g\tilde{h}=e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y)$. とすれば，$\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_xe^{s\sqrt{2y}x}=se^{s\sqrt{2y}x}$, だから，(6.16)より

$$\begin{aligned}&e^{s\sqrt{2y}x}h(y)*e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y)\\&=\sum_k\frac{i^k}{2^k}\sum_{i+j=k}\frac{(-1)^i}{i!j!}s^it^j\Big((\sqrt{2y}\partial_y)^je^{s\sqrt{2y}x}h(y)\Big)\Big((\sqrt{2y}\partial_y)^ie^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y)\Big)\\&=\sum_k\frac{i^k}{2^k}(stx)^k\sum_{i+j=k}\frac{(-1)^i}{i!j!}\Big((\frac{\sqrt{2y}}{sx}\partial_y)^je^{s\sqrt{2y}x}h(y)\Big)\Big((\frac{\sqrt{2y}}{tx}\partial_y)^ie^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y)\Big)\end{aligned}$$

が得られ，さらに $(\frac{\sqrt{2y}}{sx}\partial_y)e^{s\sqrt{2y}x}=e^{s\sqrt{2y}x}$, から

$$\begin{aligned}
&e^{s\sqrt{2y}x}h(y) * e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y) \\
&= e^{(s+t)\sqrt{2y}x}\sum_k \frac{(istx)^k}{2^k}\sum_{i+j=k}\sum_{\substack{0\le l\le j\\0\le m\le i}}\frac{(-1)^i}{(j-l)!l!(i-m)!m!} \\
&\qquad\times\left(\frac{\sqrt{2y}}{sx}\partial_y\right)^l h(y)\left(\frac{\sqrt{2y}}{tx}\partial_y\right)^m\tilde{h}(y)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

が得られる．

ここで次のことに注意する：

$$\begin{aligned}
&\{(l,m,i,j);\ i+j=k, 0\le l\le j,\ 0\le m\le i\} \\
&=\{(l,m,i,j);\ 0\le l\le j\le k-m,\ i+j=k\}.
\end{aligned}$$

これより $\sum_{i+j=k}\sum_{l=0}^{j}\sum_{m=0}^{i}=\sum_{l+m\le k}\sum_{\substack{l\le j\le k-m\\i+j=k}}$ が分かるから

$$\begin{aligned}
&e^{s\sqrt{2y}x}h(y) * e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y) \\
&=e^{(s+t)\sqrt{2y}x}\sum_k \frac{i^k}{2^k}(stx)^k\sum_{l+m\le k}\sum_{l\le j\le k-m}\frac{(-1)^{k-j}}{(j-l)!l!(k-m-j)!m!} \\
&\qquad\times\left(\frac{\sqrt{2y}}{sx}\partial_y\right)^l h(y)\left(\frac{\sqrt{2y}}{tx}\partial_y\right)^m\tilde{h}(y)
\end{aligned}$$

ここで，もし $k>l+m$ ならば

$$\sum_{j=l}^{k-m}\frac{(-1)^{k-j}}{(j-l)!l!(k-m-j)!m!}=0$$

となることが 2 項係数の交代和から分かるから，

$$\begin{aligned}
&e^{s\sqrt{2y}x}h(y) * e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y) = \\
&e^{(s+t)\sqrt{2y}x}\sum_k \frac{i^k}{2^k}(stx)^k\sum_{l+m=k}\frac{(-1)^m}{l!m!}\left(\frac{\sqrt{2y}}{sx}\partial_y\right)^l h(y)\left(\frac{\sqrt{2y}}{tx}\partial_y\right)^m\tilde{h}(y)
\end{aligned}$$

であり，先頭の項の x^k は消されてしまうことに注意してもらいたい．

$(\sqrt{2y}\partial_y-\frac{x}{\sqrt{2y}}\partial_x)e^{s\sqrt{2y}x}=0$ だから

$$e^{s\sqrt{2y}x}h(y)*e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y)=$$

$$\sum_k\frac{i^k}{2^k}\sum_{l+m=k}\frac{(-1)^m}{l!m!}\Big(\sqrt{2y}\partial_y-\frac{x}{\sqrt{2y}}\partial_x\Big)^l s^m e^{s\sqrt{2y}x}h(y)$$
$$\times\Big(\sqrt{2y}\partial_y-\frac{x}{\sqrt{2y}}\partial_x\Big)^m t^l e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y)$$

であり，これより

$$e^{s\sqrt{2y}x}h(y)*e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y)=$$
$$e^{s\sqrt{2y}x}h(y)\exp\Big\{-\frac{i}{2}\overleftarrow{\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_x}\wedge\overrightarrow{\sqrt{2y}\partial_y-\frac{x}{\sqrt{2y}}\partial_x}\Big\}e^{t\sqrt{2y}x}\tilde{h}(y). \tag{6.18}$$

これはまさしくモイヤル型の積公式だから，これで $*$ の結合律が分かる．

$x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{v^2}{2}$ と置けば

$$\partial_u=\frac{1}{\sqrt{2y}}\partial_x,\quad \partial_v=\sqrt{2y}\partial_y-\frac{x}{\sqrt{2y}}\partial_x.$$

だから，(x,y) で書かれた積公式を (u,v) で書き直した(6.18)はモイヤル積公式

$$f*g=f\exp\Big\{-\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_u}\wedge\overrightarrow{\partial_v}\Big\}g. \tag{6.19}$$

以外の何者でもない．

注意　コーエン・ランキン積はモイヤル積と同値(equivalent)であることが知られている [25]．しかし，シンプレクティック同型 $x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{v^2}{2}$ は底多様体の点を動かす変換なので，上の同値を与える変換ではない．この部分は [26] は間違いなので注意．

積公式 (6.14)は $x^n\neq x_*^n$ ではあるが，明らかに y の負冪の所で閉じている．そこで (6.14)の積を持った $\mathbb{C}[x,y^{-1},\hbar]$ を**コーエン・ランキン代数**と呼び，$(C^\infty(\mathbb{R})[y^{-1}][[\hbar]],*)$ を**オプシエンコ代数**と呼ぶことにしよう．これは，基本関係式が

$$[x,y^{-1}]=\hbar y^{-2} \tag{6.20}$$

で与えられる代数である．ここでは y^{-1} で形式的に展開して考えるので y^{-1} は 0 になれる．しかも $x*y=u*v$ なので，$e_*^{it(x*y)}$ 等にも意味がある．

この節では $*$-指数関数 $e_*^{ituv^{-1}}$ を考える．これを作るには，方程式

$$\frac{d}{dt}F_t(u,v,\hbar)=(iuv^{-1})*F_t(u,v,\hbar)$$

を考えるのだが，これを $x=uv^{-1}$, $y^{-1}=2v^{-2}$ と置き，$\frac{d}{dt}F_t(x,y^{-1},\hbar)=(ix)*F_t(x,y^{-1},\hbar)$ と考え，y^{-1} に関する級数解法を一緒にして行なう．

e_*^{itx} を考える為に微分方程式 $\frac{d}{dt}e_*^{itx}=ix*e_*^{itx}$ を考えよう．$Hol(\mathbb{C}^2)[[y^{-1}]]$ を係数域とする t の多項式 $F_m(x;y^{-1};t)$ を考え次のように置く：

$$e_*^{itx}=\sum_{k\geq 0}\hbar^k F_k(x;y^{-1};t)e^{itx},\ F_0(x;y^{-1};t)=1,\ F_k(x;y^{-1};0)=0,\ k\geq 1.$$

e_*^{itx} は $Hol(\mathbb{C}^2)[[y^{-1}]]$ の中で求まることを示そう．

まず，(u,v) に関するモイヤル積公式より次が分かる：

補題 6.6 u,v を使ったワイル順序表示で x,y 等を表示し，関数 $f(x)$ も $f(x)=f(\frac{u}{v})$ のようにワイル順序表示して計算すると，前と同じく次の積公式が成立する：

$$fy^m*gy^n=\sum_{k\geq 0}\hbar^k J_k^{m,n}(x)(f,g)y^{m+n-k},$$

$$J_k^{m,n}(x)(f,g)=\sum_{i+j=k}\frac{\sqrt{-1}^k}{2^{2k}i!j!}(-1)^i\frac{(2m-i)!}{(2m-k)!}\frac{(2n-j)!}{(2n-k)!}f^{(i)}g^{(j)}$$

ただし，$f^{(i)}$ 等はこれを x の関数として表示したときの微分を表す．

特に次が成立する：

$$x*(f(x)y^{-m})=xf(x)y^{-m}-\sum_{k\geq 1}\frac{(\hbar i)^k}{2^{2k}}(2m+k-1)f^{(k-1)}(x)y^{-(m+k)}. \tag{6.21}$$

そこで

$$e_*^{itx}=\sum_{m\geq 0}c_m(it)^m e^{itx}y^{-m}=\sum_{m\geq 0}c_m(\frac{\hbar it}{y})^m e^{itx} \tag{6.22}$$

と置いてみて，これを方程式 $\frac{d}{dt}e_*^{itx}=ix*e_*^{itx}$ に代入してやると

$$c_{m+1}=\sum_{l=0}^{m}\frac{(-1)^{m-l}(m+l)}{2^{2(m-l+1)}(m+1)}c_l,\quad c_0=1 \tag{6.23}$$

が得られる．これよりすぐに $c_1=0$ が分かるが，漸化式 (6.23)を解くため

に $\tilde{c}_m = 2^{2m}(-1)^m c_m,\ m \geq 0$ と置く．すると，(6.23)は

$$\sum_{l=1}^{m+1} l\tilde{c}_l + m\sum_{l=0}^{m} \tilde{c}_l = 0$$

のように書き直され，これより

$$(m+2)\tilde{c}_{m+2} = (m-1)\tilde{c}_m, \quad m \geq 0$$

が得られる．従って $\tilde{c}_{odd} = 0,\ \tilde{c}_0 = 1$ であり

$$\tilde{c}_{2k} = \frac{-1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2k)}$$

が得られる．これは $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ のテイラー展開の係数である．つまり，

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 0}\tilde{c}_{2k}z^{2k}, \quad \text{これより} \quad (1-(z/4)^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 0} c_{2k}z^{2k}.$$

従って

$$e_*^{itx} = \sqrt{1+(\frac{\hbar t}{4}y^{-1})^2}\cdot e^{itx} \tag{6.24}$$

が得られる．級数解法で解いたが，上の式は任意の $t \in \mathbb{R}$ で意味を持つ．

この式は $\overline{e_*^{-itx}} = e_*^{itx}$ であり，$\tilde{c}_{odd} = 0$ より $x * e_*^{itx} = e_*^{itx} * x$ が得られるから，微分して調べることにより $e_*^{-itx} * e_*^{itx} = 1$ も分かる．しかし，t を複素数とすると，$\sqrt{1+(\frac{\hbar t}{4}y^{-1})^2}$ のところから分岐が現れるように見える．ところが，この代数では y は絶対可逆になっており，何もかも y^{-1} で形式的に展開して考えるので，特異点の所は考えなくてよいのである．

奇妙な事柄

一方，x, y で生成される別の完備ワイル代数 $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ で $u = -e^{ay} * x, v = \frac{1}{a}e^{-ay}$ とおけば，$[u, v] = -\hbar i$ であり，v は可逆となり，上の要求をみたしているように見える．$\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ の中で u, v から生成される代数の閉包 $\mathcal{A}$ を考える．

$u \to -e^{ay} * x, v \to \frac{1}{a}e^{-ay}$ という置き換えは $\mathbb{C}[u,v][[v^{-1}]]$ 自身，またはこれの部分代数から $\mathcal{A}$ への準同型に拡張できるであろうか？

$e^{-itu} * v^{-1} * e^{itu} = (v - t\hbar)^{-1}$ であったから $t \neq 0$ で

$$e_*^{-itu} * v^{-1} * e_*^{itu} \to -ae_*^{-tie^{ay}*x} * e_*^{ay} * e_*^{tie^{ay}*x}$$

が意味を持つと $e^{-ay} - t\hbar$ が($*$-積に関して)可逆ということになる．これは矛盾である．なぜなら，$e^{ay} - t\hbar$ は v だけの関数だから，$*$-積に関する逆元は表示に使っている普通の積に関する逆元でもあるが，$(e^{ay} - t\hbar)^{-1}$ は y の関数としては特異点を持つからである．

従って上の対応は超越的なところにはほとんど拡張できないのであるが，$e^{-itu} * v^{-1} * e^{itu} = (v - t\hbar)^{-1}$ という公式はすぐ作れるのに，どうして

$$-ae_*^{-tie^{ay}*x} * e_*^{-ay} * e_*^{tie^{ay}*x} = e^{-ay} - t\hbar$$

という計算はできないのであろうか？ このような計算を行うにはまず $e_*^{tie^{ay}*x}$ が定義されていなければならないが，これを定義するためには

$$\frac{d}{dt} f_t(x, y) = ie^{ay} * x * f_t(x, y), \quad f_0 = f$$

が解けなくてはいけない．実は後でやるように，$e_*^{sie^{ay}*x}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{R}^2)$ の元として指数法則をみたすように定義することはできるのだが，結合律

$$e_*^{sie^{ay}*x} * (e_*^{tie^{ay}*x} * g) = e_*^{(s+t)ie^{ay}*x} * g$$

は必ずしも成立しないので(次章参照)上のような計算ができないのである．

座標変換

x, y を実数に制限して，上半平面のようなものを考えると，ポアソン積が $\{X, Y\} = Y^2$ で与えられることを反映して，基本関係式が

$$[X, Y] = \hbar Y^2 \tag{6.25}$$

で与えられる代数が現れるが，上の 2 節で見てきたように，このようなものはいろいろな考え方で扱うことができる．

一つは x, y で作る完備ワイル空間の中で $X = -e^{ay} * x$, $Y = ae^{ay}$ と置いて得られる．ここでは，Y は可逆であるが，e_*^{itY} のようなものは完備ワイル代数の中に入っていない．古典的イメージでは，これは $Y > 0$ の上半平面の代数を考えていることに対応する．

もう一つは u, v で作る完備ワイル空間の中で v^{-1} を添加し，v を絶対可逆

とした完備ワイル空間の中で $X=uv^{-1}$, $Y=2v^{-2}$ と置いて得られる．ここでは，元はすべて Y の形式的冪級数として展開して考える．とりあえず $\sum_{m\in\mathbb{N}} a_n Y^n$ のものだけを考えることにすると，$Y=0$ と置くことが許されるので Y は非可逆と考えたほうが良い．古典的イメージでは，これは $Y\geq 0$ の上半平面の代数を $Y=0$ の所でテイラー展開して考えていることに対応する．

(6.25)を満たす X,Y を二とおりに作ったが，これらが生成している代数は明らかに同型でない．したがって，この二つを合わせて考えることが出来れば，それは開いた上半平面ではなく，世界の果て，$Y=0$, まで入った閉じた上半平面を考えることに対応していると思われる[注6]．

そこで，多様体での局所座標系，座標変換の考えかたで二つの代数の間の座標変換を考えるのだが，上の代数は $X=-e^{ay}*x$, $Y=ae^{ay}$, 及び $X=uv^{-1}$, $Y=2v^{-2}$ のように置いて $*$-積の代数計算が同じになるようにしてはあるが，使われている可換積まで同じになるようにはしていないから，元を X,Y の関数として表示しようとしたとき，二とおりの生成元に関するワイル順序表示が使われていることになる．つまり，一つは (x,y) に関するワイル順序表示であり，もう一つは (u,v) に関するワイル順序表示である．両者は

$$u=-\sqrt{\frac{2}{a}}\,e^{\frac{a}{2}y}\left(x-\frac{a\hbar i}{4}\right),\quad v=\sqrt{\frac{2}{a}}\,e^{-\frac{a}{2}y}$$

という非線型な関係で結ばれており，これが「局所座標変換」にあたる．しかし，これから元の対応関係を書くのは難しい．

第三のものは上の v^{-1} のかわりに右逆元 v° を使うもので，計算すると

$$[u,v^{\circ}]=\hbar i v^{\circ 2},\quad u*v^{\circ}=uv^{\circ}+\frac{\hbar i}{2}v^{\circ 2}$$

が分かるから，これを使っても $[X,Y]=\hbar Y^2$ となるものが作れる．しかし，今度は v° を可逆とすると結合律が壊される．

[注6] このような座標変換の概念は8章の量子群の所でも現れるので，そちらも参考にしてもらいたい．

第7章
$*$-積で見える世界

前にも述べたように $*$-積の世界は通常の可換積の世界からみるとかなりデフォルメされており，$*$-積の世界では超関数に見える $\delta_*(uv)$ が通常の可換積の世界で見ると普通の関数表示を持ったり，逆に $*$-積の世界では通常の関数に見える $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ が通常の可換積の世界で見ると超関数的にしか見えないということが起こる．その理由は e_*^{ituv} がワイル順序表示では t に関して急減少関数になるからであった．

しかし，もうお分かりかと思うが，我々はこのデフォルメされて見えている世界こそが本当の世界であり，通常の可換積の世界の方がそこから見るとデフォルメされ，縮退して見えているのだと考えているのである．

超関数論とはかなり相対的なものである．何を普通の関数と見るかは理論がきめることではなく，人間がきめることである．それを選んだとき，そこからはみだしているものが，超関数に見えてしまうのである

7.1 $*$-超関数

まず次の定理を示そう：

定理 7.1 $f(\xi)$ を急減少関数，$\hat{f}(t)$ をそのフーリエ像とする．すると

$$f_*(uv) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e_*^{ituv} dt \tag{7.1}$$

は $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元 (実際には $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元) として確定する．$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を急減少関数の全体とすると，$f \mapsto f_*(uv)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ への単射であり，しかも $(f\cdot g)_* = f_*(uv) * g_*(uv)$ である．

(7.1)は $f(\xi)$ が緩増加超関数の場合でも定義でき，緩増加超関数の空間から $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{R}^2)$ への単射に拡張できる．さらに緩増加超関数 f と緩増加 C^∞ 関数 g に対して積 $f_*(uv) * g_*(uv)$ が定義でき，$f_*(uv) * g_*(uv) = (f\cdot g)_*(uv)$ である．

証明　$C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元として定まることは e_*^{ituv} をワイル順序表示で書いて見れば容易に分かる．後半の単射性を示しておこう．$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e_*^{ituv}dt = 0$ より，$\hat{f}(t)=0$ を示せばよい．積分の変数変換を行なえば，

$$\int_{-1}^{1}\frac{\hat{f}(\mathrm{arctanh}s)}{\sqrt{1+s^2}}e^{isuv}ds = 0$$

$\frac{\hat{f}(\mathrm{arctanh}s)}{\sqrt{1+s^2}}$ を $[-1,1]$ の外側では 0 として拡張してやったものは，任意の急減少関数と pairing できることが，やはり変数変換で確かめられるから，これも緩増加超関数である．従って，上の式より $\frac{\hat{f}(\mathrm{arctanh}s)}{\sqrt{1+s^2}} = 0$ が得られ，これより $\hat{f}=0$ を得る．

緩増加超関数と急減少関数に対して $f_*(uv) * g_*(uv) = (f\cdot g)_*(uv)$ が得られているのであるが，これがもっと広い範囲で成立することを示す．緩増加超関数 f と緩増加 C^∞ 関数 g の積は緩増加超関数であることが鍵となる．これは緩増加 C^∞ 関数 g と急減少関数との積は急減少関数だということによる．

$f_*(uv) * g_*(uv)$ を計算すると，任意に固定した uv に対して $\frac{1}{\cosh\frac{\hbar t}{2}}e^{\frac{2i}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}}$ は t に関して急減少関数だから，任意の急減少関数 $\phi(t)$ に対して

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\hat{g}(s)\phi(s+t)dsdt$$

が存在することを示す．$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\xi)e^{it\xi}d\xi$ と置けば，$\hat{\phi}(\xi)$ も急減少関数であり，上の式は

$$= \iiint \hat{f}(t)\hat{g}(s)e^{i(t+s)\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi dsdt$$

となるから，積分順序を入れ換えて，

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi$$

となるが，これは $g(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ が急減少関数だから意味を持つ．　□

この他に $f\cdot g$ が定義できる場合は，

1) $\hat{f}$ が C^∞ 関数，$\hat{g}$ の台がコンパクトの場合

2) f が C^∞ 関数，g の台がコンパクトの場合

などである．1)の場合は畳み込みを使って

$$fg(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t-s)\hat{g}(s) ds e^{itx} dt$$

であり，s による積分が条件より定義可能であることを使えば良い．

2)の場合は ϕ を g の台の上で 1 となるコンパクトな台の関数として $fg = (\phi f)g$ に注目する．(ϕf) は急減少関数だから，$(\phi f)^\wedge$ も急減少関数であり，従って，畳み込み

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\phi f)^\wedge(t-s)\hat{g}(s)ds$$

は $\hat{g}$ が緩増加超関数となるから定義でき，緩増加超関数となる．しかもこれは ϕ の選び方によらない．よって，

$$(\phi f)_*(uv) * g_*(uv) = (\phi f g)_*(uv) = (fg)_*(uv)$$

一方，$\phi_n \to 1$ なる列をとれば，$(\phi_n f)^\wedge \to \hat{f}$ から $f_*(uv) = \lim_n (\phi_n f)_*(uv)$ が示せるから，$f_*(uv) * g_*(uv)$ を $\lim_n (\phi_n f)_*(uv) * g_*(uv)$ で定義することにすれば $f_*(uv) * g_*(uv) = (fg)_*(uv)$ となる．

緩増加超関数 f に対して $f_*(uv) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e_*^{ituv} dt$ と置いたのであるが，これを

$$f_*(uv) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(t) e_*^{ituv} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(-t) e_*^{-ituv} dt$$

のように二つに分けて，さらに

$$f_{+i0}(uv+z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(t) e_*^{it(uv+z)} dt, \qquad \operatorname{Im} z > 0$$

$$f_{-i0}(uv+z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(-t) e_*^{-it(uv+z)} dt, \quad \operatorname{Im} z < 0$$

とする．$f_{\pm i0}(uv+z)$ は z に関してそれぞれ上，下半平面上の正則関数で

$$f_*(uv) = f_{+i0}(uv+i0) - f_{-i0}(uv-i0) \tag{7.2}$$

と書かれる．

緩増加超関数 f に対して $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(t) e^{\pm itx} dt$ は緩増加超関数であることを見ておこう：$\psi(x)$ を急減少関数とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\hat{f}(t)e^{\pm itx}\psi(x)dtdx$$

は dx を先に行なうと急減少関数となるから上の積分は実行できる．

しかし，$f_*(uv)$ を定義するだけなら，$\hat{f}(t)=e^{\frac{\hbar}{4}t}$ のような関数でも

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{\pm\frac{\hbar}{4}t}e_*^{\pm ituv}dt$$

は uv の C^∞ 関数として存在しているから(7.2)式は定義されている．

このように，$f_*(uv)$ はかなり広い所に定義される．例えば，

$$1_*=1,\quad e_*^{tuv}=\frac{1}{\cosh\frac{\hbar t}{2}}e^{\frac{2i}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}uv},$$

$$\delta_*(uv)=\pi J_0(\frac{2}{\hbar}uv),\quad (uv)_{\pm i0}^{-1}=\mp i\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\cosh\frac{\hbar t}{2}}e^{\pm\frac{2i}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}uv}dt$$

などである．$e^{-x^2/2}$ のフーリエ変換は $(e^{-x^2/2})^\wedge=e^{-\xi^2/2}$ だから

$$e_*^{-\frac{1}{2}(uv)_*^2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\cosh\frac{\hbar t}{2}}e^{\frac{2i}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}uv}dt$$

である．さらに，$f\cdot g$ が緩増加超関数の中で定義できれば，$f_*(uv)*g_*(uv)=(fg)_*(uv)$ が成立する．

7.1.1　*-デルタ関数

補題 4.5 により二つの逆元の差は積分

$$x_+^{-1}-x_-^{-1}=-i\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{itx}dt$$

で与えられる．これは $-i\delta_*(x)$ のように書いても良いであろう．$\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{itx}dt$ は 1 の *-積でのフーリエ変換と見なせるからである．

δ 関数は x の普通の関数ではないのだが，$\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{itx}dt$ はワイル順序表示では x の普通の関数である．実際ベッセル関数のハンセン・ベッセル(Hansen-Bessel)恒等式を使うと $\delta_*(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{itx}dt$ は 3 章の(3.19)式で表される．*-指数関数 e_*^{itx} がワイル順序表示では t に関して急減少関数なので，*-積での超関数のかなりの部分はワイル順序表示では通常の関数として表示される．

$x = uv$ についてモイヤル積を使って計算するのは $*$-積を普通の可換積と思って何らかの超関数として計算するのと同じことのようにも見えるのである．（しかし，一体どの超関数理論の計算になるのだろうか？）

いくつかの例

これまでの結果を見ると，次のことが成立していると思われる：$\mathbb{R}_x$ **上で，緩増加超関数を佐藤超関数として計算することはフーリエ変換を通して** $x = uv$ **と置き換えて** uv **の普通の意味の** C^∞ **関数に変換し，それに関して** $*$**-積で計算するのと同じである．**

佐藤超関数の記号では

$$\frac{1}{x+i0*} = -2\pi i \int_0^\infty e_*^{itx}dt, \quad \frac{1}{x-i0*} = 2\pi i \int_0^\infty e_*^{-itx}dt$$

のように表しているが，ここでは

$$\frac{1}{x+i0*} = (2\pi)x_+^{-1}, \qquad \frac{1}{x-i0*} = (2\pi)x_-^{-1}$$

のように書くことにする．

ベッセル関数の母関数を使って

$$\int_0^\infty e_*^{itx}dt = \frac{\pi}{2}J_0\left(\frac{2}{\hbar}x\right) + i\sum \frac{1}{2n+1}J_{2n+1}\left(\frac{2}{\hbar}x\right)$$

という表示ができる．超関数での公式では

$$\delta_*(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0*} - \frac{1}{x-i0*}\right), \quad \text{p.v.}\frac{1}{x_*} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0*} + \frac{1}{x-i0*}\right)$$

だが，我々のこれまでの記号の使い方では，これらは次のように書いてよいであろう：

$$\delta_*(x) = i(x_+^{-1} - x_-^{-1}), \quad \text{p.v.}\frac{1}{x_*} = \pi(x_{*+}^{-1} + x_{*-}^{-1})$$

フーリエ変換の公式 $e^{-\frac{t}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2t}s^2}e^{isx}ds$, $t > 0$, に注意して $e_*^{-\frac{t}{2}x^2}$, $t > 0$ を

$$e_*^{-\frac{t}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2t}s^2}e_*^{isx}dt$$

で定義する．

主値 v.p.$\frac{1}{x}$

今度は，$(uv)_{+0i}^{-1}+(uv)_{-0i}^{-1}$ を詳しく計算してみよう．これは，超関数では コーシー主値と呼ばれて

$$(x)_{+0i}^{-1}+(x)_{-0i}^{-1}=\mathrm{v.p.}\frac{1}{x}$$

と書かれている．$\overline{(uv)_{+0i}^{-1}}=(uv)_{-0i}^{-1}$ だから

$$(uv)_{+0i}^{-1}+(uv)_{-0i}^{-1}=\frac{4}{\hbar}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sin\left(s\frac{2uv}{\hbar}\right)ds$$

である．

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{xz}dx=\sum_k\frac{z^k}{k!}\int_0^1\frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

であるが，漸化式

$$\int_0^1\frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{k-1}{k}\int_0^1\frac{x^{k-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}\tag{7.3}$$

を用いて無限級数に展開すると

$$k!!=k(k-2)(k-4)\cdots 5\cdot 3\cdot 1,\quad k!!=k(k-2)(k-4)\cdots 4\cdot 2$$

という記号を用いて

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{izx}dx=\sum_k\frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2}z^{2k}+i\sum_k\frac{(-1)^k}{((2k+1)!!)^2}z^{2k+1}$$

と書かれる．

右辺第一項はベッセル関数 $J_0(z)$ の展開公式と同じものである．

7.1.2　$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれる $SL(2,\mathbb{C})$

v.p $1/x$ のフーリエ変換が，区間 $[0,\infty)$ の定義関数 $\mathrm{sgn}\,\xi$ を使って $\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\mathrm{sgn}\,\xi$ と書かれることから，その逆変換を使って，*-ヘビサイド(Heaviside)関数なるものを次で定義する（この定義のしかたは佐藤超関数に沿っている([15])）：

任意の $s\in\mathbb{R}$, $0<c<\frac{\pi}{\hbar}$ に対して，

$$H_*(uv+s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{c+it}e_*^{(c+it)(uv+s)}dt.$$

ワイル順序表示で計算すれば右辺は収束する．しかも第一結合律定理が使える形である．これは，uv の離散描像では定義できないものである．

補題 7.1 *-ヘビサイド関数 $H_*(uv+s)$ の上の定義は $0 < c < \frac{\pi}{\hbar}$ であれば c の取り方によらない．

証明 $e^{(c+it)s}e_*^{(c+it)uv} = e^{(c+it)s}e_*^{cuv} * e_*^{ituv}$ はワイル順序表示では任意に固定された $uv \in \mathbb{C}$ に対して，$t \in \mathbb{R}$ に関して急減少であり，従って $\hbar c \neq n\pi$ であるような任意の $c > 0$ について積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{c+it}e_*^{(c+it)(uv+s)}dt$ は存在する．

$\frac{1}{z}e_*^{izuv}$ は帯状領域 $\{z; \mathrm{Re}\,0 < z < \frac{\pi}{\hbar}\}$ で正則であることに注意してコーシーの積分定理を使えば次のことを示すのは容易であろう：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{c+it}e_*^{(c+it)uv}dt - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{c'+it}e_*^{(c'+it)uv}dt = 0$$

□

$H_*(uv+s) \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ である．一方

$$H_*(-uv) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{c+it}e_*^{-(c+it)uv}dt$$

も定義できる．一方 $z \in \mathbb{C}$ に対して $\tilde{H}_{*\pm}(uv+z)$ を

$$\tilde{H}_{*\pm}(uv+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{c \pm it}e_*^{(c+it)(uv\pm z)}dt$$

で定義すれば，これは複合同順で上半-, 下半-平面 D_+, D_- 上で正則関数となる．H_* は境界値の差 $\tilde{H}_{*+} - \tilde{H}_{*-}$ と理解される．

実際 $\tilde{H}_{*\pm}(uv+z)$ は $\mathbb{C} - \{\pm\frac{\hbar i}{2}(2n+1); n = 1, 2, \ldots\}$ 上で正則である．

さらに次のような公式も得られる：

補題 7.2

$$H_*'(uv) = \frac{1}{2\pi}\delta_*(uv), \qquad H_*(uv) + H_*(-uv) = 1,$$
$$H_*(uv) * H_*(uv) = H_*(uv), \quad H_*(uv) * H_*(-uv) = 0$$

証明 最初の式は積分記号下で微分を取ってみれば容易に分かる．次のこと

$$H_*(uv) + H_*(-uv) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{z}e_*^{iz(uv)}dz + \int_{-c+i\infty}^{-c-i\infty}\frac{1}{z}e_*^{iz(uv)}dz\right)$$

に注意して，コーシー積分公式を使えば第二の公式を得る．

超関数同士の積は一般には定義できないが，この場合には次が分かる：

$$H_*(uv) * H_*(uv) = \frac{1}{2\pi}\int\Big(\frac{1}{2\pi}\int\frac{2c+i\tau}{(c+i\tau-it)(c+it)}dt\Big)\frac{1}{2c+i\tau}e_*^{2c+i\tau}d\tau$$

留数公式を使って，

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{2c+i\tau}{(c+i\tau-it)(c+it)}dt = 1$$

が分かる．これで第三の式も得られた．

同様に，

$$H_*(uv) * H_*(-uv) = \frac{1}{2\pi}\int\Big(\frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{(c+i\tau+it)(c+it)}dt\Big)e_*^{2c+i\tau}d\tau$$

が分かる．$c>0$ だから，

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{(c+i\tau+it)(c+it)}dt = 0$$

が得られ，最後の公式はこれより容易に得られる．　□

$\delta_*(uv)$ や $H_*(uv)$ のような「超関数」は離散描像とか正規順序表示では本当の超関数になってしまって表示できないが，ワイル順序表示でのみ普通の関数としての表示を持つ元である．

従って，これらの元を含むような結合代数を作った場合にはその真空表現といったものは定義できないと思われる．というのは真空表現というのは何らかの意味で正規順序表示されたものしか相手にできないと思われるからである．

従ってそういう代数に作用素表現を付けるとすれば，全く別のことを考えなければならないように思われる．

ところで，球擁き補題を使うと

$$v * H_*(uv) = v * H_*(u*v+\frac{\hbar i}{2}) = H_{*+}(uv+\hbar i) * v$$

であるが，uv の量子正準共役 ε が使えれば $\mathrm{Ad}(e^{it\varepsilon})H_*(uv) = H_*(uv+\hbar t)$ だから，かなり面白い計算が可能となる．変数 uv に対する量子正準共役は形式的には $\varepsilon = a\log v - b\log u$, $a+b=1$, である．例えば $\log v$ が定義出来るところで考えておれば[注1]，可能である．これについては別の機会に考え

注1 例えば上半平面のようなところ，しかし，気楽に言う程これはやさしくない．$\log v$ が定義出来るならば，$[u, \log v] = -i\hbar v^{-1}$ も定義できなければならない．

ることにしよう.

ここで交換法則

$$e_*^{\frac{\pi i}{4\hbar}(u^2-v^2)} * f(uv) = f(-uv) * e_*^{\frac{\pi i}{4\hbar}(u^2-v^2)}$$

に注意して，次のように置く：

$$\xi = e_*^{\frac{\pi i}{4\hbar}(u^2-v^2)} * H_*(uv), \quad \eta = H_*(uv) * e_*^{-\frac{\pi i}{4\hbar}(u^2-v^2)}.$$

すると容易に

$$\xi^2 = \eta^2 = 0, \quad \xi * \eta + \eta * \xi = 1$$

が分かる．これだけの関係式から ξ, η で生成される代数は $1, \xi, \eta, \xi * \eta$ の線型結合で，2×2 の行列全体であることが分かる．これは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中に含まれるこれまでとは違う結合代数である．まとめると，次の定理となる：

定理 7.2 $1,\ \xi,\ \eta, \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ は 2×2 複素行列全体 $M(2, \mathbb{C})$ のなす代数と同型な代数を生成する.

7.2 非可換極座標系

極座標系というのは色々に考えられる．普通の積を使っているときには複素平面では $z = re^{i\theta}$ と書かれる．体積要素は $\frac{1}{2}dr^2 \wedge d\theta$ である.

(u, v) で生成されるワイル代数で，u, v を実数に制限して $r = v, \theta = u$ とすると $[v, e^{-iu}] = \hbar e^{-iu}$ だから，これも極座標系に見えなくもない．しかし，2 章 2.2.3 で述べたような式が成立してしまうので，v を正の所に限定することができない.

$z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$ とすると $r^2 = \bar{z}z$, $e^{i\theta} = z\frac{1}{\sqrt{\bar{z}z}}$ である．極座標系だから $z = 0$ は除いた所で考えるべきだと思ってしまうと 6.4 節で述べたように，z^{-1} を添加することになるだろうが，こうすると $e_*^{t\bar{z}}$ を一緒に考える限り $(c - z)^{-1}$ も添加しておかないといけないことになる．また，2 章の定理 2.3 で分かるように $z = u + iv$ は正規順序表示による計算では $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中では絶対可逆元であった.

また，$[z, \bar{z}] = -2\hbar$ であるからエルミート積公式(モイヤル積公式を変数変換したもの)で全く同様に $*$-積を計算できる．そこでは，$z, \bar{z}$ を正準共役量のように考えて正規順序表示とか，ΨDO-積公式にあたるものも考えられる．そこでは z の右逆元も左逆元も作ることができる．しかしこの場合には，u, v に関する正規順序表示とか，ΨDO-積公式と混同しないように注意しておかねばならない．この節で正規順序表示とかワイル順序表示と言えばすべて (u, v) に関するものである．

$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で考えるときには取捨選択をうまくやらないと発散を取り込んでしまうのである．

7.2.1　非可換円柱

まず，極座標と関係がありそうな代数を作っておこう．$B(\mathbb{R}, C^\infty(S^1))$ を $\mathbb{R}$ から $C^\infty(S^1)$ への有界連続写像の全体としよう．$B(\mathbb{R}, C^\infty(S^1))$ の任意の元はフーリエ級数で次の形に書かれる：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(y) * e^{ikx}; \quad \sum_k ||a_k||^{2s}(1+|k|)^{2s} < \infty \quad \forall s > 0 \tag{7.4}$$

但し $||a|| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |a(y)|$ である．$s > 0$ を固定すると

$$\|f\|_s = \sum_k ||a_k||^{2s}(1+|k|)^{2s}$$

はノルムになるので，このノルム系で位相を入れておく．

x, y に交換関係 $[x, y] = -\hbar i$ があるものとすると，任意の多項式 $p(y)$ について交換則 $e^{ikx} * f(y) = f(y+k\hbar) * e^{ikx}$ が成立するから，多項式近似定理により任意の C^∞ 関数 $f(y)$ について交換則 $e^{ikx} * f(y) = f(y+k\hbar) * e^{ikx}$ が成立する．特に $[y, e^{-ix}] = \hbar e^{-ix}$ である．

次のような交換則を設定すればこれで代数が定義される：

$$e^{ikx} * f(y) = f(y+k\hbar) * e^{ikx} \tag{7.5}$$

結合律は容易に示せる．

この交換則は y が $\hbar\mathbb{Z}$ 上を動く不定元と考えても意味がある．この本では

ここだけにしか現れないが，離散描像の方を優先させて代数を作ることができるのである．しかしこのようにして作ったものが離散描像を使わないでも得られるものかどうか一般的なことは何も分かってはいない．

$B(\hbar\mathbb{Z}, C^\infty(S^1))$ を $\hbar\mathbb{Z}$ から $C^\infty(S^1)$ への有界写像の全体とし，そこに (7.5) 式で積を定義し，代数 $\mathcal{A} = (B(\hbar\mathbb{Z}, C^\infty(S^1)), *)$ を考える．これを**非可換円柱**と呼ぶ．

$\mathcal{A}$ はいくつかの特別な元を持っている．まず，y は $y(\hbar k) = \hbar k$ という，各 $\hbar k$ に対して S^1 上の定数関数 $\hbar k$ を与える写像と理解される．これを，$\hbar\mathbb{Z}$ の**座標関数**と呼ぶ．$a \notin \hbar\mathbb{Z}$ のときには，$(y-a)^{-1}$ も $\mathcal{A}$ の元である．

ϖ_k を次のように定義されたものとしよう：

$$\varpi_k(y) = \begin{cases} 1, & y = \hbar k \\ 0, & y \neq \hbar k \end{cases} \tag{7.6}$$

すると，次が分かる：

補題 7.3 $\mu = \sqrt{1+y^2}^{-1}$ とすると，$\varpi_0 = \lim_{n\to\infty} \mu_*^n = \lim_{t\to\infty} e_*^{-t|y|}$ であり，さらに $y * \varpi_0 = \varpi_0 * y = 0$，$\varpi_k * \varpi_\ell = \delta_{k,\ell}\varpi_k$ も成立する．

これより次も分かる：

$$e^{nix} * \varpi_k = \varpi_{k-n} * e^{nix}. \tag{7.7}$$

(7.7)式より $e^{mix} * \varpi_k$ は行列要素 E_k^{k-m} $(k-m, k \in \mathbb{Z})$ と思える．つまり，

$$(e^{mix} * \varpi_k) * (e^{nix} * \varpi_l) = \delta_{k,l-n} e^{(m+n)ix} * \varpi_l \tag{7.8}$$

が成立する．従って，$\mathcal{A}$ は有限階数のすべての行列を含む．

$n \neq 0$ のときには $(e^{nix} * \varpi_k) * (e^{nix} * \varpi_k) = 0$ であることに注意する．離散描像にした時に真空 ϖ_0 が得られるというのは示唆にとんでいるが，この場合の真空は $y * \varpi_0 = \varpi_0 * y = 0$ であって，これまでのものとは違う．

このように離散描像の方を優先させて代数を作ることができるのだが，これは論理的にはジャンプしているから，この本では，このやり方はここ以外使っていない．あくまで微積分の代数の中で自然に見えるものだけを追求し

ているのである．

7.2.2　非可換極座標系

極座標系と一応呼んではいるが最初に述べたように極座標系は色々に考えられるので，ここで述べるのものが良いものかどうかについては不明である．$\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}$ とか $\sqrt[*]{z\bar{z}}^{-1}$ が定義できるので，これを使って話をしよう．

$\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}$ はラプラス変換の公式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt$$

を使って，

$$\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e_*^{-t\bar{z}*z} dt$$

で定義される．右辺の積分は無論ワイル順序表示で計算する．この定義では $\sqrt[*]{z*\bar{z}}^{-1}$ は定義できない．第一象限 D_1 での重積分

$$\iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{st}} e_*^{-(s+t)\bar{z}*z} dsdt$$

が存在し $(\bar{z}*z)^{-1}$ を与えていることより，容易に

$$\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} = (\bar{z}*z)^{-1}$$

が分かる．

$$\sqrt[*]{\bar{z}*z} = (\bar{z}*z) * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{d}{dt} e_*^{-t\bar{z}*z} dt$$

と定義する．右辺の積分は無論ワイル順序表示で計算する．第二結合律定理より結合律が成立し

$$z = z * (\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} * \sqrt[*]{\bar{z}*z}) = (z * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}) * \sqrt[*]{\bar{z}*z}$$

である．

$$(\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} * \bar{z}) * (z * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}) = 1, \quad (z * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}) * (\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} * \bar{z}) = 1 - \varpi_0$$

も成立する．

$z * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}$ は見掛けとは違って z のユニタリー部分と解釈できないし，可逆でもないのだが，これを何か $e^{i\theta}$ のようなものと思うことにし，$\sqrt[*]{\bar{z}*z}$, $z * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}$ の組を考える．これらは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元である．

さらに

$$(\bar{z}*z)*(z*\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1})-(z*\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1})*(\bar{z}*z)=2\hbar z*\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}$$

であるから，$\rho = \frac{1}{2}\bar{z}*z$, $T = z * \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1}$, $T^* = \sqrt[*]{\bar{z}*z}^{-1} * \bar{z}$ とすれば，$T^* * T = 1$, $T * T^* = 1 - \varpi_0$ で，

$$[\rho, T] = \hbar T, \quad [\rho, T^*] = -\hbar T^*, \quad [\rho, \varpi_0] = 0 \tag{7.9}$$

である．T, T^* はテープリッツ代数を生成している．(ρ, T) を**非可換極座標系**と呼ぶことにする．7.2.1 非可換円柱のところの関係式と見比べてほしい．

上の関係式より

$$T * \rho * T^* = (\rho - \hbar)(1 - \varpi_0) = \rho - \hbar + \hbar\varpi_0 \tag{7.10}$$

である．$u*v$ のときの計算と同じで，$\rho - \zeta$ は $\zeta \notin \hbar\mathbb{N}_1$ のとき可逆であり，ρ は $\hbar\mathbb{N}_1$ を動く不定元と思える．$\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ である．

もとの生成元との関係は

$$z = T * \sqrt[*]{2\rho}, \quad \bar{z} = \sqrt[*]{2\rho} * T^* \tag{7.11}$$

である．$T = e^{i\theta}$ と思えれば，$[\theta, \rho] = -\hbar i$ と考えられ，7.2.1 節の話につながるのだが，そのようにはなっていない．

主な違いは ρ, e^{-ix} は可逆であるのに y, T はそうでないということである．普通の極座標は原点が特異点であるが，非可換極座標系には特異点が出て来ない．そのかわり，原点に対応する真空 ϖ_0 が現れている[注2]．

7.2.3 絶対可逆元

$\mathcal{I}_{\varpi_0}$ を ϖ_0 で生成される両側イデアルとし，これで商空間 $\mathcal{P}$ を作って考えて見よう．これは mod ϖ_0 で計算するという意味である．mod ϖ_0 では T は

[注2] しかし二つの代数はどちらも作用素表現を持っている．

ユニタリーとなり，これで 4 章2.2.3 節の話につながるわけだが，万事うまくつながるのではない事が問題なのである．mod ϖ_0 では T が可逆となるから，ρ が可逆であることより，z も mod ϖ_0 で可逆となる．(非可換円柱ではここまでは出て来ない.)　普通の極座標系は $z=0$ は除いて考えているから話が合っているように見えるのだが，$T*\rho=(\rho-\hbar)*T$ だったから，任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して

$$T^m*\rho*T^{*m}=\rho-m\hbar \mod \varpi_0$$

となる．左辺は mod ϖ_0 で可逆だから右辺もそうならないといけない．もともと $\rho-\zeta$ は $\zeta\notin\hbar\mathbb{N}$ で可逆だったから，上とあわせると，任意の $\zeta\in\mathbb{C}$ で $\rho-\zeta$ は mod ϖ_0 で可逆となる．このような元を**絶対可逆元**と呼んでいた[注3].

このようなものは考えにくいかもしれないが，ρ が mod ϖ_0 では無限遠方を動く不定元に変わると考えれば話が合う．つまり，絶対可逆元により生成される代数というのは，∞ のみを点とする可換代数である．これは形式的冪級数環 $\mathbb{C}[[x]]$ においては $c\neq 0$ なら $c-x$ が可逆であり，$\mathbb{C}[[x]]$ の点は 0 のみであるということに対応しているが，形式的冪級数全体が現れるとは限らず，mod ϖ_0 で考えたときの ρ を $\tilde\rho$ と書くことにして，

$$(\tilde\rho-c)^{-1}=\tilde\rho^{-1}*\Big(1+\frac{c}{\tilde\rho}+(\frac{c}{\tilde\rho})^2+\cdots\Big)$$

が定義できておれば良い．これが任意の c で定義できるためには，$\tilde\rho^{-1}$ を(そこに勝手に数を代入できない)形式的な変数と見てしまわねばならない．これは，mod ϖ_0 で考えたときには代数の元というものを，p_i を T,T^* の多項式として

$$p_n*\tilde\rho^n+\cdots+p_0+p_{-1}*\tilde\rho^{-1}+p_{-2}*\tilde\rho^{-2}+\cdots+p_{-k}*\tilde\rho^{-k}+\cdots$$

のように負冪の方は無限に続く形式的冪級数として考えよということを意味する．これを $\tilde\rho$ に関する**漸近展開**と呼ぶ.

形式的冪級数として考えるのだが，形式的冪級数の全部が出てくるとは限らないことに注意しておこう.

注3　このような元は 2 章節にもすでに現れており，(u,v) に関する正規順序表示では $u+iv$ は絶対可逆元であり，しかも逆元が必ず二つづつ存在していた.

上で分かったように，非可換極座標系を mod ϖ_0 で考えると，原点は除いて考えたことにはなるが，無限遠の近傍で考えていることになってしまうのである．非可換極座標系の代数の中では，原点の近傍から原点だけを除いた集合というのは意味をなさない集合なのである．

一方非可換円柱において，変数を $y>0$ の所に束縛することを考えると，$(y+a)^{-1}$, $a>0$, を添加することになるが，こうすると y はやはり絶対可逆元となってしまうのである．

つまり古典的描像にぴったり合うようにすると絶対可逆元という作用素表現を持ちにくい元を拾ってしまうのである．

注意 一応定義を与えて非可換極座標系と呼びはしたが，見方によっては非可換円柱の方を非可換極座標系と呼んだほうが良いかもしれないし，もっと他に極座標系とすべきものはあると思う．問題にすべきはこれらの定義が同値でないことで，互いの関係まで込めて非可換極座標系の全貌は見えていないのである．どちらが正しいかとか，どちらが良いかなどと言っている段階ではないのである．

7.3 方程式 $\frac{d}{dt}f_t = (ie^{ay}*x)*f_t$

これまで扱った指数関数は exp(多項式) の形のものばかりであったが，この節でもう少し一般の指数関数を扱ってみよう．座標変換を自由に考えようとすると，もう少し一般の指数関数も必要になるからである．ここでは $*$-指数関数 $e_*^{te^{ay}*x}$ について考えよう．この例は時間の一方向きには一意的に解けるのに，逆向きには一意性が無い発展方程式の例であり，しかもこのようなものが $*$-指数関数として出て来る例である．このようなものは熱方程式で広く知られており大方の解釈は熱方程式をもとにして行われている．ここではそれを離れて自由に考えることを試みる．また，この例は変数を $y>0$ のようなところに束縛する別の方法を与えるかもしれないと思っているものである．(定理 7.4 参照.)

$a>0$ として[注4]表題のような方程式を考えよう．$e^{ay}*x\in\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ だか

注4 議論は $a\neq 0$ であれば良いのだが，$a<0$ とすると，以下の不等式等の向きを逆にしなければならなくなる．

ら，$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ 内で t に関して実解析的な解があれば，それは一意的であることに注意しておこう．

$[e^{ay} * x, -\frac{1}{a}e^{-ay}] = -\hbar i$ だから，$\tau = \frac{1}{a}e^{-ay}$, $\mu = e^{ay} * x$ と置けば τ, μ は量子正準共役，$[\tau, \mu] = -\hbar i$ である．x, y を実数に制限して考えるが，$\overline{e^{ay} * x} = x * e^{ay}$ だから，$e^{ay} * x$ はエルミート元でないことに注意する．この節では次のことを証明する：

定理 7.3 発展方程式

$$\frac{d}{dt}L_t = (ie^{ay} * x) * L_t \tag{7.12}$$

は $t \le 0$ のとき，多項式程度の増大度の「ほとんど全ての初期値」$L_0 = g$ に対して一意的解を持ち，それを $L_t(g)$ とすると，これは $t > 0$ まで拡張されで $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元となり，解とはなるが，$t > 0$ では解は一意的でない．つまり，$L_t, t > 0$ は演算子としてはきまらない．

同様に $\frac{d}{dt}R_t = R_t * (ie^{ay} * x)$ は $t \ge 0$ のとき，多項式程度の増大度の「ほとんど全ての初期値」g に対して一意的解を持ち，それを $R_t(g)$ とするとこれは $t < 0$ まで拡張されで $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元となり，解とはなるが，$t < 0$ で解は一意的でない．つまり，$R_t, t < 0$ は演算子としてはきまらない．

「ほとんど全ての初期値」の内容は証明の中ではっきりする．証明のためにはまず，$L_t(g) = F_t(x, y)$ と置き，

$$e^{ay} * f(x, y) = e^{ay} \cdot f(x + \frac{\hbar i a}{2}, y),$$

に注意すると方程式 (7.12)は

$$\partial_t F_t(x, y) = ie^{ay}\left\{\left(x + \frac{\hbar i a}{2}\right) F_t\left(x + \frac{\hbar i a}{2}, y\right) - \frac{\hbar i}{2}\partial_y F_t\left(x + \frac{\hbar i a}{2}, y\right)\right\}.$$

となる．初期条件を $F_0 = g(x, y)$ としておく．$F_t(x, y) = G_t(x, y)e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ と置くと，

$$\partial_t G_t(x, y) = \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y G_t\left(x + \frac{\hbar i a}{2}, y\right)$$

となるが，これは微分方程式ではないことに注意する必要がある[注5]．これを

注5 これらの式を正規順序表示で書いてみると方程式 (7.12)は

初期条件 $G_0 = g(x,y)e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$ で解きたいわけである．方程式 (7.12)は x, y を実数に制限しているので $G_t(x+\frac{\hbar ia}{2}, y)$ のような書き方は意味が無いように思えるかもしれないが，以下のように考えて意味をつける．

ξ に関する緩増加シュワルツ超関数を使って

$$G_t(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,\xi,y)e^{i\xi x}d\xi.$$

と書けているものとすれば(つまり，$G_t(x,y)$ は C^∞ な緩増加シュワルツ超関数，この場合には $F_t(x,y)$ もそうなる)，上の式は微分方定式

$$(e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}\partial_t - \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y)a(t,\xi,y) = 0. \tag{7.13}$$

に変換される．これは ξ をパラメーターとする微分方程式だが，形を見れば，ベクトル場 $e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}\partial_t - \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y$ に沿って $a(t,\xi,y)$ が一定となるだけの，分かりやすい形になっている．このベクトル場の積分曲線は $f(x,y) = c$ の形に書かれるがそれを図示してみると次頁のようになっている：

$\frac{\hbar t}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} - \frac{1}{2a}e^{-2ay}$ はこのベクトル場に沿って一定である．従って，これを解くには ξ を固定して

$$t' = t - \frac{1}{a\hbar}e^{-2ay}e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}, \qquad y' = y$$

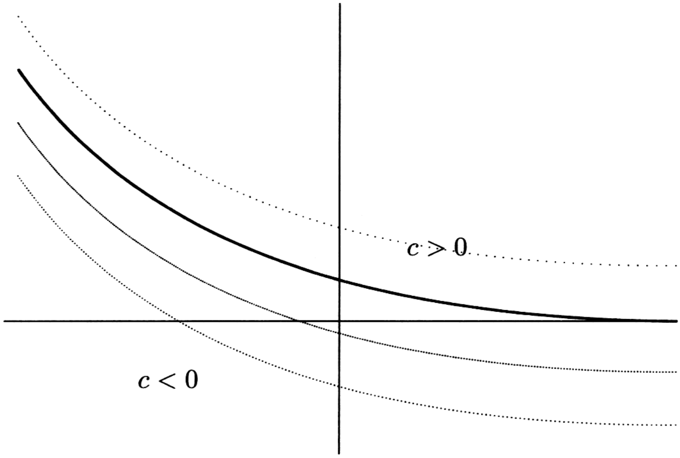
という座標変換を考えると，ベクトル場の座標変換公式で

$$\partial_{t'} = \partial_t, \quad \partial_{y'} = -\frac{2}{\hbar}e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}e^{-2ay}\partial_t + \partial_y$$

となるから，$a(t,\xi,y)$ を ξ を固定して (t',y') の関数と思ったときには y' を含まない t' の任意の関数というのが解となる．これは $\frac{\hbar}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}$ をかけて $\frac{\hbar t}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} - \frac{1}{2a}e^{-2ay}$ の任意の関数と言っても同じである．

$$\partial_t F_t(x,y) = ie^{ay}(x+\hbar ia)F_t(x+\hbar ia, y)$$

だから，$F_t(x,y) = G_t(x,y)e^{-\frac{1}{\hbar i}xy}$ と置くと，$\partial_t G_t(x,y) = i(x+\hbar ia)G_t(x+\hbar ia, y)$ となる．$G_t(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,\xi,y)e^{i\xi x}d\xi$ と書けているものとすれば $(\partial_t + e^{-\hbar a\xi}\partial_\xi)a(t,\xi,y) = 0$ となる．これの解は $\varphi(e^{a\hbar\xi} - a\hbar t, y)$ である．これについても似たような結果になる．



$c>0$ の積分曲線は初期面と交わらない

これを超関数的に言い替えてやると，上の式は $a(t,\xi,y)$ を (t,y) 毎に超関数 $a(t,y)(\xi)$ が定まる超関数値関数と考えて，試験関数 $\psi(\xi)$ に対して，

$$\int(\partial_t a(t,y)(\xi)e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}\psi(\xi)-\frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y a(t,y)(\xi)\psi(\xi))d\xi=0$$

という方程式だと考えられる．解の方は任意の緩増加シュワルツ超関数 $\mathfrak{S}'$ 値 C^∞ 関数 $\varphi(y)(\xi)=\varphi(\xi,y)$ を使って

$$a(t,\xi,y)=\varphi(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay})$$

のように求められる．右辺は，試験関数 $\psi(\xi)\in\mathfrak{S}$ に対して

$$\int\varphi(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay})\psi(\xi)d\xi$$

で定義する超関数とする．これまでに課した条件は次のものである．

条件 1 $\varphi(\xi,y)$ は緩増加シュワルツ超関数 $\mathfrak{S}'$ 値 C^∞ 関数であって，任意の (t,y) に対して $\varphi(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay})$ も緩増加シュワルツ超関数となる．

この条件を満たす関数のフーリエ像全体を $\mathcal{S}_{x,y}$ と書く．特に φ の台が ξ が負の方向に有界であれば問題ない．

そこで，$e^{\frac{ci}{\hbar}xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-\frac{cy}{\hbar})e^{i\xi x}d\xi$ に注目すると，初期値 g が $e^{\frac{2i}{\hbar}xy},1,$ $e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ のときには φ はそれぞれ次のものであることが分かる：

$$\varphi(\xi, -\frac{1}{2a}e^{-2ay}) = \delta(\xi - \frac{4y}{\hbar}),\quad \delta(\xi - \frac{2y}{\hbar}),\quad \delta(\xi).$$

一般には $g(x,y)$ のフーリエ原像を $\hat{g}(\xi,y)$ とすると，$G_0(x,y) = g(x,y)e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$ の x に関するフーリエ原像は

$$\psi(\xi,y) = \int \delta(\xi' - \frac{2y}{\hbar})\hat{g}(\xi-\xi',y)d\xi' = \hat{g}(\xi - \frac{2y}{\hbar}, y)$$

となるから，

$$\varphi(\xi, -\frac{1}{2a}e^{-2ay}) = \hat{g}(\xi - \frac{2y}{\hbar}, y) \tag{7.14}$$

となる．従って，初期条件を与える超関数 $\varphi(\xi,\eta)$ は $G_0(x,y) = e^{\frac{2i}{\hbar}xy}, = g(x,y)e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$ に応じて次で与えられる．$\eta \leq 0$ の所では，$-2a\eta = e^{-2ay}$ で，

$$\begin{aligned}\varphi(\xi,\eta) =& \delta\left(\xi + \frac{1}{a\hbar}\log(-2a\eta)\right),\\ \varphi(\xi,\eta) =& \hat{g}(\xi + \frac{1}{a\hbar}\log(-2a\eta), -\frac{1}{2a}\log(-2a\eta))\end{aligned}$$

であり，$\eta > 0$ の所では任意である．

これより，初期条件 $F_0(x,y) = 1$ のときには解：

$$\varphi(\xi, \frac{\hbar t}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} - \frac{1}{2a}e^{-2ay}) = \delta\left(\xi + \frac{1}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right)\right) \tag{7.15}$$

が得られる．一般の初期条件 $F_0(x,y) = g(x,y)$ のときには

$$= \hat{g}\left(\xi + \frac{1}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right), -\frac{1}{2a}\log(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\right) \tag{7.16}$$

である．

一般に $\eta \geq 0$ だと $\frac{\hbar t}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} - \frac{1}{2a}e^{2ay} = \eta$ で定義される曲線上では t はいつも正で 0 になれないから，この曲線は初期面 $t=0$ を横切らない．上の式は解を初期関数を使って書こうとしているのだが，これが可能なのは $\eta < 0$ の所だけである．$\eta \geq 0$ では φ は任意なので，解は一意的でない．

つまり，一般の初期関数 g のときには，解は $t \leq 0$ のときには(7.16)で与えられ，それは

$G_t(x,y)$

$$=\int e^{i\xi x}\hat{g}\Big(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\big(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\big),-\frac{1}{2a}\log(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\Big)d\!\!\!^{-}\xi$$

であった．これは g によって一意的に定まるので，これを $L_t(g)$, $t\le 0$, と書く．t に関する実解析性は g がかなり良い関数でないと保証されないが，$t\le 0$ ならば L_t は $\mathcal{S}_{x,y}$ から $\mathcal{S}_{x,y}$ への線型作用素となる．

$t>0$ のときには $e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}<0$ となる所があるが，そういう場所は初期関数 g ではきまらないので，$G_t(x,y)$ が C^∞ となるようにならば φ を勝手にきめてよい．つまり，$t>0$ の所では左方程式の解には一意性が無いのである．

7.3.1　初期値 1 の解，初期値 $e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$, $e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ の解

特に初期値 1 の解 $L_t(1)$ を $\tilde{F}_t(x,y)$, $\tilde{F}_t=\tilde{G}_te^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ とすると，

$$\tilde{F}_t(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right)\right)e^{i\xi x}d\!\!\!^{-}\xi e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$$

となるが，$t\le 0$ の場合には，log の中はいつも正で

$$\xi'=\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right)$$

が可微分同相を与えるから，これで座標変換をすればもっと見やすくなるはずである．デルタ関数の性質から $\tilde{G}_t(x,y)=e^{i\xi x}\frac{d\xi}{d\xi'}\Big|_{\xi'=0}$ だから，ここを計算し，x,y の関数として表示することを考えよう．

$$\frac{d\xi'}{d\xi}=1+\frac{1}{2}\frac{a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}}{e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}}$$

であり，$\xi'=0$ は $e^{-a\hbar\xi}+a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}=e^{-2ay}$ で与えられるが，これは $t\le 0$, $t>0$ にかかわらず実解

$$2e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}=-a\hbar t+\sqrt{(a\hbar t)^2+4e^{-2ay}}$$

を持つから，右辺を ψ と置けば

$$\frac{d\xi'}{d\xi}\Big|_{\xi'=0}=\frac{\psi}{\psi+a\hbar t}$$

となる．従って

$$\tilde{G}_t(x,y) = e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\psi}\frac{\psi}{\psi + a\hbar t}$$

$$\tilde{F}_t(x,y) = e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\psi}\frac{\psi}{\psi + a\hbar t}e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$$

が得られる．これらは (t,y) について実解析的であり，しかも，このようにして作った解は $t>0$ の所まで自然に延長可能である．また，これが任意の t で解になっていることも次の式に注意すれば容易に確かめることができる：

$$\tilde{G}_t(x+\frac{a\hbar i}{2},y) = e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\psi}\frac{\psi^2}{2(\psi + a\hbar t)}$$

$$\partial_t\psi = -a\hbar\frac{\psi}{\psi + a\hbar t},\quad \partial_y\psi = -4a\frac{e^{-2ay}}{\psi + a\hbar t}.$$

構成のしかたより $\tilde{F}_t(x,y)$ は $t\in\mathbb{R}$ で実解析的だから次が分かる．

補題 7.4 任意の $s,t\in\mathbb{R}$ に対して指数法則 $\tilde{F}_s(x,y) * \tilde{F}_t(x,y) = \tilde{F}_{s+t}(x,y)$ が成立する．

$e_*^{ite^{ay}*x} = \tilde{F}_t(x,y)$ はもっと詳しく書けば，

$$\tilde{F}_t(x,y) = e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}e^{ay}\psi}\frac{e^{ay}\psi}{e^{ay}\psi + e^{ay}a\hbar t},$$

$$e^{ay}\psi = -a\hbar te^{ay} + \sqrt{(a\hbar te^{ay})^2+4} \tag{7.17}$$

である．この形から $\tilde{F}_t(x,y)$ が $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{R}^2)$ の元であることも分かる．

さらに，

$$\sqrt{(\frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t)^2+1} + \frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t = \Big(\sqrt{(\frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t)^2+1} - \frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t\Big)^{-1} \tag{7.18}$$

$$\Big(1-\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\Big)\Big(1+\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\Big) = \frac{4}{(e^{ay}a\hbar t)^2+4} \tag{7.19}$$

に注目する．$e^{ay}\psi(-t,y) = a\hbar te^{ay} + \sqrt{(a\hbar te^{ay})^2+4}$ として，

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{-t}(x,y) &= e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}e^{ay}\psi(-t,y)}\frac{e^{ay}\psi(-t,y)}{e^{ay}\psi(-t,y) - e^{ay}a\hbar t}\\ &= e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\left(e^{ay}a\hbar t+\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}\right)}\Big(1+\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\Big),\end{aligned}$$

$$\overline{\tilde{F}_{-t}(x,y)} = \tilde{F}_t(x,y)\Big(\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}+e^{ay}a\hbar t\Big)^2$$

を得る．$\tilde{F}_t(x,y)$ がユニタリーでないのは $e^{-2y}*x$ がエルミート元でないからである．

$e^{ay}*x = e^{ay}(x+\frac{a\hbar i}{2})$, $x*e^{ay} = e^{ay}(x-\frac{a\hbar i}{2})$ から $e^{ay}x = e^{ay}*(x-\frac{a\hbar i}{2})$ はエルミート元であることが分かるから，x を $x-\frac{a\hbar i}{2}$ に置き換えて

$$\hat{F}_t(x,y) = e_*^{it(e^{ay}x)}$$

を上と同じ考え方で作れば，

$$\hat{F}_t(x,y) = e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}(-e^{ay}\hbar t+\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4})}\left(\frac{2}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)$$

となって，これは，容易にユニタリーの条件

$$\overline{\hat{F}_{-t}(x,y)} = \hat{F}_t(x,y)$$

をみたすことが分かる．（しかし以下ではこれは使わない.）

もとの $\tilde{F}_{-t}(x,y)$ に戻って

$$\left[e^{ay}*x,\ e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}+e^{ay}a\hbar t\right)}\left(1+\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)\right] = 0$$

も直接計算で確かめられる．これより，次のことが分かる：

命題 7.1 $e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{(e^{-2y}a\hbar t)^2+4}+e^{ay}a\hbar t\right)}\left(1+\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+1}}\right)$ は右方程式

$$\frac{d}{dt}R_t = R_t*(ite^{ay}*x), \qquad R_0 = 1$$

の解でもある．

初期値 $e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$ の解

この場合，解を与える φ は

$$\varphi(\xi,\eta) = \delta(\xi+\frac{2}{a\hbar}\log(-2a\eta)).$$

従って，時刻 t での解は

$$\varphi(\xi, \frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}) = \delta\left(\xi+\frac{2}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right)\right). \quad (7.20)$$

これは (7.15)に似ているが，分母が $a\hbar$ から $\frac{a\hbar}{2}$ に変わった為に，$a\hbar t < -1$ だと常に

$$\xi + \frac{2}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right) > 0$$

が成立して，結局 (7.20)式の右辺は 0 となる．まとめると次が分かる：

定理 7.4 任意の $t \in \mathbb{R}$ で $L_t(e^{\frac{2i}{\hbar}xy})$, $L_t(e^{-\frac{2i}{\hbar}xy})$ は t について実解析的な解として定義できる．しかも，すべての $t \in \mathbb{R}$ で $L_t(e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}) = e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ であり，$a\hbar t \leq -1$ の時には $L_t(e^{\frac{2i}{\hbar}xy}) = 0$ となる．

証明 初期関数 $e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$, $e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ のフーリエ像は $\delta(\xi - \frac{4y}{\hbar})$, $\delta(\xi)$ であり，これらは条件を満たす．第一の式は方程式をベクトル場の式と考えて $(e^{-2y} * x) * e^{-\frac{2i}{\hbar}xy} = 0$ より当然予想されるが，初期関数が $\varphi(\xi,\eta) = \delta(\xi)$ となることから得られる．（後の (7.21)も参照.） □

一方，$[\frac{1}{a}e^{-ay}, e^{ay} * x] = -\hbar i$ だったから，これらは一種の量子正準共役で，これより次が分かる：

命題 7.2 $\tilde{F}_t(x,y) = e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}-e^{ay}a\hbar t\right)}\left(1 - \frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)$ とすれば，

$$[\frac{1}{a\hbar}e^{-ay}, \tilde{F}_s(x,y)] = s\tilde{F}_s(x,y)$$

である[注6]．

証明 $t = 0$ のとき $[e^{-ay}, \tilde{F}_0(x,y)] = 0$ であり，微分してみると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\frac{1}{a}e^{-ay}, \tilde{F}_t(x,y)] &= [\frac{1}{a}e^{-ay}, ie^{ay} * x * \tilde{F}_t(x,y)] \\ &= \hbar\tilde{F}_t(x,y) + ie^{ay} * x * [\frac{1}{a}e^{-ay},\ \tilde{F}_t(x,y)].\end{aligned}$$

$[\frac{1}{a}e^{-ay}, \tilde{F}_t(x,y)] = \tilde{F}_t(x,y) * g_t$ と置いてこの形の解を探すと $\tilde{F}_t(x,y) * \frac{d}{dt}g_t = \hbar\tilde{F}_t(x,y)$ だから，$\hbar t\tilde{F}_t(x,y)$ は実解析的な解であることが分かる．しかし，このやりかたではこれ以外の解があるかもしれないので，次のように直接計算で確かめる：

$$[e^{-ay}, \tilde{F}_t(x,y)] = e^{-ay}\left(\tilde{F}_t(x - \frac{a\hbar i}{2}, y) - \tilde{F}_t(x + \frac{a\hbar i}{2}, y)\right).$$

だから，(7.18)を使って計算すると結果が得られる．

注6 このことを 8.2.2 節で使いたいのである．

□

上の式を書き直すと $(e^{-ay} - a\hbar s) * \tilde{F}_s = \tilde{F}_s * e^{-ay}$ だから，次が成立する：

補題 7.5 $s \geq 0$ のときには

$$\tilde{F}_{-s}(x,y) * (e^{-ay} * \tilde{F}_s(x,y)) - a\hbar s = \tilde{F}_{-s}(x,y) * ((e^{-ay} - a\hbar s) * \tilde{F}_s(x,y))$$
$$= \tilde{F}_{-s}(x,y) * (\tilde{F}_s(x,y) * e^{-ay}) = e^{-ay}$$

が成立する．

証明　$\tilde{F}_s(x,y) * e^{-ay}$ は定義できて，左方程式の初期値 e^{-ay} の解になっている．第一の等式は分配法則と指数法則より得られる．一方時刻が負の方向には左方程式の解が一意的なので，指数法則より $\tilde{F}_{-t}(x,y) * (\tilde{F}_s(x,y) * g) = \tilde{F}_{-t+s}(x,y) * g$ が成立する．$t = s$ とすればよい．□

これはあぶない式で，結合律が成立すると両辺に F_s, F_{-s} を左右からかけて，上の式が $s < 0$ まで成立することになる．すると

$$1 = (F_{-s} * e^{ay} * F_s) * (F_{-s} * e^{-ay} * F_s) = (F_s * e^{ay} * F_{-s}) * (e^{-ay} + a\hbar s)$$

となり，$e^{-ay} + a\hbar s$ が $s < 0$ についても可逆になってしまって矛盾となる[注7]．したがって，結合律がどこかで破れるのだが，それがどのように破れるのか，それを以下で見よう．

7.3.2　一般の初期関数の場合

一般の初期関数 g のときには，解は $t \leq 0$ の時には(7.16)で与えられていたが $t > 0$ の所では左方程式の解には一意性が無かった．

これでは不便だから，何らかの方法で解を指定してしまおう．一つの決め方は，$\eta > 0$ に対して $\varphi(\xi, \eta) = 0$ と置いてしまうことである．つまり，上の式で $e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} < 0$ となる所では 0 とするのである．ただし，$G_t(x,y)$ が C^∞ とならないといけないから，

注7　この矛盾は第6章で述べた奇妙な事柄と関係がある．

$$\int \varphi(\xi, \frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi} - \frac{1}{2a}e^{-2ay})e^{i\xi x}d\xi$$
$$= \int_{-\infty}^{\frac{2}{a\hbar}\log(a\hbar t) - \frac{1}{\hbar}4y} \varphi(\xi, \frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi} - \frac{1}{2a}e^{-2ay})e^{i\xi x}d\xi$$

が C^∞ という条件がつきそうに見える．しかし，課されているのは t, y を固定したとき，緩増加超関数ということ，および t, y に関する C^∞ 性であるから，これは自動的にみたされている．そこで

$$\varphi_0(\xi, \frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi} - \frac{1}{2a}e^{-2ay})$$
$$= \begin{cases} \hat{g}\Big(\xi + \frac{1}{a\hbar}\log\big(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\big), -\frac{1}{2a}\log(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\Big) & \\ 0, & (e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} \le 0) \end{cases} \tag{7.21}$$

のようにすれば，ともかく $t > 0$ の所でも解は書ける．これを，$\tilde{L}_t(g)$ と書く．(7.21)の二行目の設定は $\lim_{y\to\infty} g(\xi, y) = 0$ ならば不要であろう．$\tilde{L}_t(g)$ は任意の $g \in \mathcal{S}_{x,y}$ で定義される．無論 $t \le 0$ のときには $L_t(g) = \tilde{L}_t(g)$ である．

ともかく，初期条件 $g(x, y) \in \mathcal{S}_{x,y}$ に対して，方程式 (7.12)の解が $t \in \mathbb{R}$ 全体で定義される．これが解であるということは，直接計算の検算で確かめることもできる．これで定理 7.3 の証明は終りである．

上できめた $\tilde{L}_t$ は $t > 0$ のときには (7.21)のきめかたより，$\tilde{L}_t(g) = 0$ から $g = 0$ が出るようになっている．つまり，$\tilde{L}_t : \mathcal{S}_{x,y} \to \mathcal{S}_{x,y}$ は $t \ge 0$ のところでは単射となるように定義されている．しかし，方程式の解と言うだけならこのほかにも色々な取り方があり，一意性は無い．また，$t > 0$ においては $\tilde{L}_t(g) = \tilde{F}_t * g$ であるとは限らない．これは $t \le 0$ のときのみ成立する．

しかし，上の考察はさらに様々なことを教えてくれる．$t \ge 0$ のとき，$\tilde{L}_{-t}(g)$ は g によって一意的にきまる．そこで g_t を初期値が g となる任意の解とすれば，$t \ge 0$ のとき $\tilde{L}_{-t}(g_t) = g$ が成立する．しかし，g_t は沢山あり，左方程式は線型であるから $t > 0$ で $\tilde{L}_{-t}$ は核($\tilde{L}_{-t}(K) = 0$ となる元)を持つわけである．$\tilde{L}_{-t}(K)$ は $\tilde{L}_{-t}(1) * K$ と書いても良いもので，$\tilde{F}_t = \tilde{L}_t(1)$ であり，$\tilde{F}_t$ には指数法則が成立していた．$\tilde{F}_t * \tilde{F}_{-t} = 1$ であるから $0 = \tilde{F}_t * (\tilde{F}_{-t} * K) \ne K$ であり，このような所では結合律は当然崩れているのである．

補題 7.6 $\tilde{L}_{-t} : \mathcal{S}_{x,y} \to \mathcal{S}_{x,y}$ は $t > 0$ の時に非自明な核を持ち，さらに $\tilde{L}_{-t}\tilde{L}_t = I$ となる．

7.3.3 L_{-t} の核

$t \geq 0$ では $\tilde{L}_t(g)$ は初期関数に関して一意的に決まっていたから，ここでは $t < 0$ の場合を考える．まず式(7.17)を思い出す．(7.21)式において，初期関数 $\hat{g}(\xi, y)$ がある $t_0 < 0$ で

$$\varphi(\xi,\ \frac{\hbar t_0}{2}e^{-a\hbar\xi} - \frac{1}{2a}e^{-2ay}) =$$
$$\hat{g}\Big(\xi + \frac{1}{a\hbar}\log\big(e^{-2ay} - a\hbar t_0 e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\big), -\frac{1}{2a}\log(e^{-2ay} - a\hbar t_0 e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\Big) = 0 \tag{7.22}$$

をみたせば，$\hat{g}(\xi, y)$ に対応する初期関数を $G(x, y) = \int \hat{g}(\xi, y)e^{i\xi x}d\!\!\!^{-}\xi$ として，$K(x, y) = G(x, y)e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ と置けば $L_t(K) = \tilde{F}_t(x, y) * K = 0$ となることが分かる．

このような $\hat{g}(\xi, y)$ 特徴づけよう．まず，$t_0 < 0$ は固定して，領域

$$E_{t_0} = \{(\xi + \frac{1}{\hbar}\mu, -\frac{1}{2}\mu);\ \mu = \frac{1}{a}\log(e^{-2ay} - a\hbar t_0 e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}), \xi, y \in \mathbb{R}\}$$

を決定する．$\mathrm{supp}\,\hat{g}$ が E_{t_0} の補集合内にあれば $\hat{g}$ は上の条件 (7.22)をみたす．

上の $\mu = \frac{1}{a}\log(e^{-2ay} - a\hbar t_0 e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})$ は e^{2ay} が任意の正値を取るから，$t_0 < 0$ を固定したとき，ξ 毎に $\mu > \log(-a\hbar t_0 e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})$ の範囲を動く．これより

$$E_{t_0} = \{(\xi, \eta); \eta < \frac{\hbar}{2}\xi - \frac{1}{a}\log(-a\hbar t_0)\}$$

であることが分かる．$D_{t_0} = E_{t_0}^c$ 内に台を持つ「条件 1」を満たす超関数であれば，これは条件 (7.22)をみたす．

特に，各 η に対して，ξ に関して緩増加超関数でなければならない．この場合，D_t の性質から $\xi > 0$ の方向には台が有限でなければならない．$0 \geq t > t'$ のとき，$D_t \subset D_{t'}$ は明らかであろう．

初期関数 $\hat{g}(\xi, y)$ が時刻 $t < 0$ の $\tilde{L}_t(g)$ に影響を与えるのは $(\xi, y) \in E_t$ の部分だけである．

命題 7.3 $\hat{g}(\xi, y)$ について，$\mathrm{supp}\,\hat{g} \subset D_t$, $t<0$, ならば

$$G(x,y) = \int \hat{g}(\xi, y)e^{i\xi x}d\xi$$

として，$K(x,y) = G(x,y)e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ と置けば $L_t(K) = \tilde{F}_t(x,y)*K = 0$ となる．

7.3.4　接触ワイル代数化

ワイル代数では $\hbar$ は数扱いされているのだが，ハイゼンベルグ代数ではこれも代数の元である．従って，第 6 章で述べた擬微分作用素による表現では正規順序でもワイル順序でもハイゼンベルグ代数は表現されてない．これの表現を得るには $\hbar$ も作用素として表現しなければならないのである．そこで何か $\mathrm{ad}(2\tilde{\hbar})$ のようなものを考え，それの固有値 λ の固有空間[注8]として表現空間が得られるようにしたいのである．

実はその為の方法は接触ワイル代数を構成することなのであるが，これは後で述べる単位円盤上のベレーズィンの代数でもポアンカレ擬球の場合でもそのようになっているのである．

まず，これまでの $\hbar$ にあたる所を ν とし，これを定数ではなく $\mathbb{R}_+$ を動く変数と考える．$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}_+)$ を $[0,\infty)$ から $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}^4)$ への C^∞-写像の全体とする．積の構造は各 $t\in[0,\infty)$ 毎の $*$-積として入れる．まず，$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}_+)$ において，

$$\Phi_t:\ (u_1,\, v_1,\, u_2,\, v_2,\, \nu) \to (e^{2t}u_1,\, v_1-ct,\, e^t u_2,\, e^t v_2,\, e^{2t}\nu)$$

で定義される変換を考える．これは ν を不変にはしていないが同型対応である[注9]．

Φ_t 不変な元は，$c\neq 0$ を任意に固定して，次のようなもので生成される：

$$\tau = \frac{ci}{\nu}u_1, \quad u = e^{\frac{1}{c}v_1}*u_2, \quad v = e^{\frac{1}{c}v_1}*v_2, \quad \tilde{\hbar} = \nu * e^{\frac{2}{c}v_1}. \qquad (7.23)$$

注8 後で述べる Berezin 表現に合わせようとすると $\lambda = \frac{1}{s+1}$ となるようにしたい．

注9 (8.19)も参照してもらいたい．

$\tau, u, v, \tilde{\hbar}$ は容易な計算で

$$[\tau, \tilde{\hbar}] = 2\tilde{\hbar},\ [\tau, u] = u,\ [\tau, v] = v,\ [u, v] = -\tilde{\hbar}i,\ [\tilde{\hbar}, u] = [\tilde{\hbar}, v] = 0$$

をみたしていることが分かる[注10]. τ の代わりに $\tilde{\tau} = \tilde{\hbar} * \tau$ を使って上の式を書き直せば,

$$[\tilde{\tau}, \tilde{\hbar}] = 2\tilde{\hbar}^2, \quad [\tilde{\tau}, u] = \tilde{\hbar} * u, \quad [\tilde{\tau}, v] = \tilde{\hbar} * v,$$
$$[u, v] = -\tilde{\hbar}i, \quad [\tilde{\hbar}, u] = [\tilde{\hbar}, v] = 0$$

とも書かれる. ν はこれらの元から生成される代数の外側の元だが, すべてと可換であることにかわりはないから, このような代数を構成して後に $\nu =$ 定数と置くことは問題ない.

しかし, $\mathrm{ad}(\tilde{\hbar})$ の固有空間として $\hbar =$ 定数と置いた空間が現れるようにしようとすると, 実は $e_*^{s\tilde{\tau}}$ のような元を使うことが必要になるのである. つまり

$$e_*^{s\tilde{\tau}} = e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau} = e_*^{sic(e^{\frac{2}{c}v_1} * u_1)} \tag{7.24}$$

であって, このような元を *-指数関数として定義しないといけなくなるのである[注11].

$$[(2\tilde{\hbar})^{-1}, \tilde{\hbar} * \tau] = \frac{1}{2}\tilde{\hbar} * [\tilde{\hbar}^{-1}, \tau] = 1$$

だから, 指数関数 $e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau}$ がうまく定義できれば, s に関して両辺が同じ微分方程式をみたすことから

$$[(2\tilde{\hbar})^{-1}, e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau}] = se_*^{s\tilde{\hbar}*\tau}$$

も分かる. つまり s は $\mathrm{ad}((s\tilde{\hbar})^{-1})$ は固有値であり, 固有関数として $e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau}$ が選べるのである.

真空表現を考えるので, 真空にあたるものとして

$$\tilde{\varpi} = 2e^{\frac{2i}{\nu}u_1v_1} * 2e^{\frac{2i}{\nu}u_2v_2} = 4e^{\frac{2i}{\nu}(u_1v_1+u_2v_2)}$$

注10　この操作が古典力学における等エネルギー面への簡約(reduction)にあたる.

注11　この部分については後の方の 8.2.2 節も参照してもらいたい.

を取るのである．すると，$\nu = \frac{1}{2}$ としてやると

$$(2\tilde{\hbar}) * \tilde{\varpi} = 2\nu * e^{\frac{2}{c}v_1} * \tilde{\varpi} = \tilde{\varpi}$$

となり，これより

$$2\tilde{\hbar} * e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi} = \frac{1}{s+1} e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi}$$

が得られる．

ところが，これに定理 7.4 をあてはめると，$s \leq -1$ のときには $e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi} = 0$ となるのである．従って表現空間を作るには，$s > -1$ 毎に空間

$$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}) * e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi}$$

を考え，この線型空間を点 s の上のファイバーと考えて $(-1, \infty)$ 上のベクトル束 $\coprod \mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}) * e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi}$ を作る．これの連続切断の全体のなす線型空間を表現空間とするのである．上のベクトル束はこの表現空間の固有空間分解だと考えるのである．

これで，$\hbar$ まで真空表現でき，(変数を増やした) 完備ワイル空間の中にハイゼンベルグ代数まで取り込めたことになる．

第8章
ベレーズィンの代数,量子群の代数

前節まではワイル代数を中心に考えてきたが，これとは別にC^*環の中ですべてを考えようする立場もあって，こちらの方が歴史は古い．この章では[12]等を参考にして，主にベレーズィン(Berezin) [2]がC^*-代数を使って描いて見せた世界も，拡張ワイル空間の中に取り込めることを示す．

8.1 ベレーズィンの代数

この節では，ワイル代数から一時離れて，ベレーズィン(Berezin)の定義した作用素の代数を与え，それを使って微分，積分演算子をその作用素で表現してみよう．この節はヒルベルト空間や，その上の作用素の取り扱いに対する良い演習になる．計算はややしんどいが，それなりに面白い計算になっているので，微積分の復習と思ってやってもらいたい．

まずΓ(ガンマ)関数，B(ベータ)関数の定義と公式を思い出しておこう：

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \quad (\mathrm{Re}\, z > 0), \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{8.1}$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (\mathrm{Re}\, x > 0,\ \mathrm{Re}\, y > 0). \tag{8.2}$$

上の(8.1)を使って，$xB(x, y+1) = B(x+1, y)y$, $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ という式も得られる．

B 関数 $B(s+1,k+1)$ について次の公式は重要である：

$$\sum_{k=m}^{\infty} B(s+1,k+1) = B(s,m+1) \qquad s>0,\ m\geq 0. \tag{8.3}$$

この公式を得るには

$$\frac{1}{s+1}\frac{2}{s+2}\cdots\frac{k}{s+k}(1-\frac{k+1}{s+k+1}) = sB(s+1,k+1)$$

に注目して和をとればよい．$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{s+1}\frac{2}{s+2}\cdots\frac{k}{s+k}=0$ を見るには，対数をとり

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+\frac{s}{k}) > \int_0^{\infty}\log(1+\frac{s}{x})dx = \infty$$

に注意すれば良い．計算には次の一般二項定理が良く使われる：

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{1}\frac{\alpha-1}{2}\cdots\frac{\alpha-k+1}{k}. \tag{8.4}$$

α が自然数だと右辺は有限で切れるが，それ以外は無限に続く級数で，収束半径は1である．$\alpha=-s<0$ の時には

$$(1-x)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{kB(s,k)}x^k \tag{8.5}$$

という公式にしておいた方が便利である．

ベレーズィン作用素の定義のためにまず次のことに注意する：

補題 8.1 D 上で積分が収束するような，増大度に関するしかるべき条件を満たす正則関数，特に収束半径が1を越える g に対し次が成立する：

$$\frac{(s+1)i}{2\pi}\iint_D g(v)(1-v\bar{v})^s dvd\bar{v} = g(0) = \frac{(s+1)i}{2\pi}\iint_D g(\bar{v})(1-v\bar{v})^s dvd\bar{v}.$$

証明　原点0における $g(v)$ のテイラー展開を考え，$k\neq 0$ の時には積分 $\int e^{ik\theta}d\theta$ が消えることに注意すると，残るのはテイラー展開の定数項のみで，そこでは(8.2)を使って，

$$\frac{i}{2}\iint_D (1-v\bar{v})^s dvd\bar{v} = 2\pi\int_0^1 (1-r^2)^s rdr = \pi\int_0^1 (1-t)^s dt = \frac{\pi}{s+1}$$

である．　□

上の B 関数の定義を思い出すと次のことも分かる：

$$\frac{i}{2}\iint_D (v\bar{v})^m(1-v\bar{v})^s dv d\bar{v} = 2\pi\int_0^1 r^{2m}(1-r^2)^s r dr = \pi B(m+1, s+1). \tag{8.6}$$

そこで上の(8.5)を使って，

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{B(m+1,s+1)}(1-v\bar{v})^s(w\bar{v})^m = \frac{s+1}{\pi}\frac{(1-v\bar{v})^s}{(1-w\bar{v})^{s+2}} \tag{8.7}$$

に注意すれば，

$$f(w) = \frac{s+1}{\pi}\int_D f(v)\left(\frac{1-v\bar{v}}{1-w\bar{v}}\right)^{s+2} dm(v,\bar{v}) \tag{8.8}$$

が得られる．但し $dm(v,\bar{v}) = \frac{i}{2(1-v\bar{v})^2}dv d\bar{v}$ であり，これはポアンカレの単位円盤上の面積要素である．

そこで $\mathcal{H}^s(D)$ を D 上の正則関数で

$$\int_D |f|^2(1-v\bar{v})^{s+2}dm(v,\bar{v}) < \infty \tag{8.9}$$

となるもの全体とする．

補題 8.2 $s > -1$ に対して $\mathcal{H}^s(D)$ は自然にヒルベルト空間となり，

$$e^m_{(s)}(w) = \big(B(m+1, s+1)\big)^{-\frac{1}{2}} w^m$$

が $\mathcal{H}^s(D)$ の正規直交基底となる．

さらに，$s < s'$ のとき，$\mathcal{H}^s(D)$ は自然に $\mathcal{H}^{s'}(D)$ の中に連続に，かつ稠密に埋め込める．

証明 内積が定義されることは明らかだから，完備性を示せば十分．そのためには

$$\sum_k |a_k|^2 B(k+1, s+1) < \infty$$

のとき $\sum_k a_k w^k$ の収束半径が 1 以上であることを示せば良い．内積の不等式より

$$\begin{aligned}(\sum_k |a_k||w|^k)^2 &\le \sum_k |a_k|^2 B(k+1,s+1)\sum_k B(k+1,s+1)^{-1}|w|^{2k}\\ &\le C\sum_k \frac{1}{B(s+1,k+1)}|w|^{2k}.\end{aligned}$$

$|w|^2 < 1$ だが，右辺の冪級数の収束半径は $\lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(s+k)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)\Gamma(s+k+1)} = 1$ より 1 だと分かるから，$\sum_k |a_k||w|^k < \infty$ を得る．$B(k+1, s+1) > B(k+1, s'+1)$ に注意すれば，埋め込みに関する結果も得られる． □

記憶してほしいのは，$w^k; k = 0, 1, 2, \ldots$ が任意の $s > -1$ に対して $\mathcal{H}^{(s)}(D)$ の(ノルムは s に依存するが)直交基底になっているということである．我々は一個のヒルベルト空間を考えているのではなく，ヒルベルト空間の族

$$\{\mathcal{H}^{(s)}(D); s > -1\}$$

を考えているのである．こういう場合には共通の直交基底の存在は極めて便利なのである．

$D \times \bar{D}$ 上の正則関数 $a(w, \bar{v})$，つまり $w, \bar{v}$ に関して収束半径 1 以上で冪級数 $\sum_{k,l} b_{k,l}\bar{v}^k w^l$ の形に展開される関数に対して，$\mathcal{H}^s(D)$ に作用するベレーズィン演算子とは次のようなものである：

$$(P_s(a)u)(w) = \frac{(s+1)i}{2\pi} \int_D a(v, \bar{v})u(v) \left(\frac{1 - v\bar{v}}{1 - w\bar{v}}\right)^{s+2} dm(v, \bar{v}). \quad (8.10)$$

まず，これがどんな作用素であるか見ておこう．単位円盤 D 上の正則関数 u は原点中心にテイラー展開されて $u(w) = \sum_k a_k w^k$ のように書けるから，$B(s+1, m+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+m+2)}$ であったことを思い出して計算すると，

補題 8.3 収束半径が 1 を越える任意の正則関数 $\phi(w)$ に対して，

$$(P_s(\phi(w))u)(w) = \frac{(s+1)i}{2\pi} \int_D \phi(v)u(v) \frac{(1 - v\bar{v})^s}{(1 - w\bar{v})^{s+2}} dv d\bar{v} = \phi(w)u(w)$$

は有界作用素であり，さらに，$s > 0$ のときには $(P_s(\frac{1}{1\pm w})u)(w) = \frac{1}{1\pm w}u(w)$ も有界作用素である．

証明　第二のことを示せば十分であろう．$\frac{1}{1-w} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^m w^k$ だから，

$$(P_s(w^m)u)(w) = w^m u(w)$$

に注意して，$\lim_{m\to\infty} \sum w^m u(w)$ が有界作用素であることを示せば十分である．$u = \sum a_k w^k$ のとき，

$$\lim_{m\to\infty} \sum w^m u(w) = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{k=m}^{\infty} a_k) w^m$$

だから，内積に関するコーシーの不等式と，(8.3)より

$$
\begin{aligned}
\|\frac{1}{1-w}u\|_s^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} |\sum_{k=m}^{\infty} a_k|^2 B(s+1,m+1) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} |a_k|^2 B(s{+}1,k{+}1) \sum_{k=m}^{\infty} B(s{+}1,k{+}1)B(s{+}1,m{+}1) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} |a_k|^2 B(s+1,k+1)B(s,m+1)B(s+1,m+1) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} B(s,m+1)B(s+1,m+1)\|u\|_s \leq \frac{1}{s}\|u\|_s
\end{aligned}
$$

となることが分かる．□

また，次のことも分かる：

$$
\begin{aligned}
&(P_s(\bar{w}^l))u(w) \\
&= \sum_{k,m} \frac{(s+1)i}{2\pi} \int_D a_k \bar{v}^l v^k \frac{1}{\pi B(s+1,m+1)} (w\bar{v})^m (1-\bar{v}v)^s dv d\bar{v} \\
&= \sum_{m} \frac{(s+1)i}{2\pi} \int_D a_{m+l} w^m \frac{1}{\pi B(s+1,m+1)} (v\bar{v})^{m+l} (1-\bar{v}v)^s dv d\bar{v} \\
&= \sum_{m} a_{m+l} w^m \frac{B(s+1,m+l+1)}{B(s+1,m+1)} \\
&= \sum_{m} a_{m+l} w^m \frac{(m+l)\cdots(m+1)}{(s+m+l+1)\cdots(s+m+2)}
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

となる．$\|(P_s(\bar{w}^l))u\|_s^2$ を計算してみると，

$$
\begin{aligned}
&\|(P_s(\bar{w}^l))u\|_s^2 \\
&\quad = \sum_{m} |a_{m+l}|^2 \frac{(m+l)^2\cdots(m+1)^2}{(s+m+l+1)^2\cdots(s+m+2)^2} B(s+1,m+1) \\
&\quad < \sum_{m} |a_{m+l}|^2 \frac{(m+l)\cdots(m+1)}{(s+m+l+1)\cdots(s+m+2)} B(s+1,m+1) \\
&\quad = \sum_{m} |a_{m+l}|^2 B(s+1,m+1+l) \leq \|u\|_s^2
\end{aligned}
$$

だから有界作用素で $0 \leq m \leq l-1$ に対して $(P_s(\bar{w}^l))w^m = 0$ となる．

補題 8.3 と(8.11)より，$a = \sum_{l,k} b_{l,k}\bar{v}^l w^k$ に対して

$$P_s(a)(\sum a_m w^m) = \sum_{k,l,m} b_{k,l} a_{m+l-k} \frac{B(s+1,m+l+1)}{B(s+1,m+1)} w^m$$

となるから，この形より次のことが分かる：

命題 8.1 $P_s(a)$ が作用素として 0 ならば $a=0$ である．

上の計算から次のことも分かる：

補題 8.4 $P_s(1-\bar{w})$ は逆作用素 $P_s(\frac{1}{1-\bar{w}})$ を持つ．$P_s(1-\bar{w})u=0$ となるような正則関数 u は存在するが，そのような u はどの $\mathcal{H}^s(D)$, $s>0$ にも入っていない．

証明　逆をもつことは $\sum_{k\geq 0} P_s(\bar{w})^k$ が有界作用素として存在することを言えば良い．容易に $P_s(\bar{w})^k = P_s(\bar{w}^k)$ が分かるので，(8.11)を使って計算する．$u=\sum_k a_k w^k$ のとき

$$\sum_{k\geq 0} P_s(\bar{w})^k u = \sum_{k\geq 0}(\sum_{l=0}^{\infty} a_{k+l}\frac{B(s+1,k+l+1)}{B(s+1,k+1)})x^k.$$

従って，コーシーの不等式から

$$||\sum_{k\geq 0} P_s(\bar{w})^k u||_s^2 = \sum_{k\geq 0}(\sum_{l=k}^{\infty} a_l B(s+1,l+1))^2$$

$$\leq \sum_{k\geq 0}\sum_{l=k}^{\infty}|a_l|^2 B(s{+}1,l{+}1)\sum_{l=k}^{\infty}B(s{+}1,l{+}1) \leq \sum_{k\geq 0} B(s,k{+}1)||u||_s^2 = ||u||_s^2$$

となる．これより $\sum_{k\geq 0} P_s(\bar{w})^k$ は有界な作用素である．$P_s(\bar{w})^k = P_s(\bar{w}^k)$ だからこれを

$$P_s(1-\bar{w})^{-1} = (1-P_s(\bar{w}))^{-1} = \sum_{k\geq 0} P_s(\bar{w}^k) = P_s(\frac{1}{1-\bar{w}})$$

のように書いてもよい．

さらに，$P_s(1-\bar{w})\sum a_k w^k = 0$ とする．(8.11)より，$a_{k+1} = \frac{s+k+2}{k+1}a_k$, $k\geq 0$, となるから，

$$a_k = \frac{s+k+1}{k}\frac{s+k}{k-1}\cdots\frac{s+2}{1}a_0 = \frac{1}{s+1}\frac{1}{B(s+1,k+1)}a_0.$$

冪級数 $\sum\frac{1}{B(s+1,k+1)}w^k$ の収束半径は 1 であるが，これのノルムは $\sum\frac{1}{B(s+1,k+1)}$ であり，これは任意の $s>0$ で発散する．　□

補題 8.5 $P_s(\frac{\bar{w}}{1-w\bar{w}})$ は $\mathcal{H}^s$ から $\mathcal{H}^{s+2}$ への有界な作用素で

$$(P_s(\frac{\bar{w}}{1-w\bar{w}})u)(w) = \frac{(s+1)i}{2\pi}\int_D \frac{\bar{v}}{1-v\bar{v}}u(v)\left(\frac{1-v\bar{v}}{1-w\bar{v}}\right)^{s+2} dvd\bar{v} = \frac{1}{s}u'(w)$$

である．同様に，

$$P_s((\frac{\bar{w}}{1-w\bar{w}})^2) = \frac{1}{s(s-1)}u''(w)$$

であり，$\mathcal{H}^s$ から $\mathcal{H}^{s+4}$ の有界作用素となる．この形から上の作用素は $s > -1$, $s \neq 1, 0$ の所でしか定義されない．

証明　$u = \sum a_k w^k$ の時，

$$(P_s(\frac{\bar{w}}{1-w\bar{w}})u)(w) = \sum_k a_k \frac{(s+1)i}{2\pi}\int_D \bar{v}v^k \frac{(1-v\bar{v})^{s-1}}{(1-w\bar{v})^{s+2}}dvd\bar{v}.$$

これに (8.7)を代入して

$$= \sum_k \sum_{m=0}^{\infty} a_k \frac{(s+1)i}{2\pi}\int_D \frac{1}{B(m+1,s)}\bar{v}v^k(1-v\bar{v})^{s-1}(w\bar{v})^m dvd\bar{v}$$

となり，これより $= \frac{1}{s}u'(w)$ を得るが，ノルムの計算をすると

$$||\frac{1}{s}u'(w)||_{s+2}^2 = \sum_k |a_k|^2 k^2 B(s+3,k)$$
$$= \sum_k |a_k|^2 \frac{k}{s+k+2}(s+2)(s+1)B(s+1,k+1) \leq ||u||_s^2$$

が分かる．全く同様の計算で二番目も分かる．□

(8.11)を使うと次のような計算もできる．$u = \sum a_k w^k$ として

$$\begin{aligned}(P_s(\bar{w}w)u)(w) &= (P_s(\bar{w})P_s(w))u(w)\\ &= \sum_{k,m}\int_D a_k \bar{v}v^{k+1}\frac{1}{\pi B(s+1,m+1)}(w\bar{v})^m(1-\bar{v}v)^s dvd\bar{v}\\ &= \sum_{k\geq 0}\int_D a_k w^k(\bar{v}v)^{k+1}(1-\bar{v}v)^s\frac{1}{\pi B(s+1,k+1)}\\ &= \sum_k a_k\frac{B(s+1,k+2)}{B(s+1,k+1)}w^k = \sum_k a_k\frac{k+1}{s+k+2}w^k.\end{aligned} \tag{8.12}$$

この形から $P_s(\bar{w}w) = P_s(\bar{w})P_s(w)$ は有界で対角型の作用素で，固有値は

$\frac{k+1}{k+1+s+1}, k = 0,1,2,\ldots$ であり，有界で対角型の作用素の逆を持つことが分かる．これを使うと様々な $f(t)$ に対して作用素 $f(P_s(\bar{w}w))$ を

$$f(P_s(\bar{w}w))(\sum_k a_k w^k) = \sum_k a_k f\left(\frac{k+1}{s+k+2}\right) w^k$$

として定義することができる．f としては右辺が定義できればどんな関数でもかまわない．$\exp tP_s(\bar{w}w)$, $P_s(1-\bar{w}w)^{-1}$ とか $P_s(1-\bar{w}w)^{-1}$ などはこのような意味で定義される．

しかし例えば(8.12)で存在が分かった $P_s(\bar{w}w)^{-1}$ を $P_s(a)$ の形に書いたとき a はどのように表示されているのだろうか？この問題は積公式，つまり $P_s(a)P_s(b) = P_s(c)$ としたときの c を計算する手段を持てばかなり答えることができる．

この問題は重要だが実はかなり難しいので，この問題をまともに考えずに避けて通り抜けて先を考えた方が得策である．一つの方法は作用素の表示法を変えることである．

正規直交基底を使って行列表示してみるために，$P_s(a)e^m_{(s)} = \sum_k A_{m,k}e^k_{(s)}$ と置けば，

$$A_{m,k} = \frac{1}{\pi}\int_D a(v,\bar{v})v^m\bar{v}^k(1-v\bar{v})^s dv d\bar{v}(B(m+1,s+1))^{-1/2}(B(k+1,s+1))^{-1/2}. \tag{8.13}$$

従って作用素ノルム $||P_s(a)||$ は次で与えられる：

$$||P_s(a)||^2 = (s+1)^2 \iint a(v,\bar{v})\overline{a(w,\bar{w})}\left(\frac{1-v\bar{v}}{1-v\bar{w}}\frac{1-w\bar{w}}{1-w\bar{v}}\right)^{s+2} dm(v,\bar{v})dm(w,\bar{w}).$$

一方

$$(P_s(a)u)(w) = \sum_{m,k} e^m_{(s)}(w)A_{m,k}\int_D u(v)e^k_{(s)}(\bar{v})(1-v\bar{v})^s dv d\bar{v}$$

だから，$A(w,\bar{v}) = \sum_{m,k} e^m_{(s)}(w)A_{m,k}e^k_{(s)}(\bar{v})$ と定義すれば，

$$(P_s(a)u)(w) = \int_D A(w,\bar{v})(1-v\bar{v})^s u(v) dv d\bar{v} \tag{8.14}$$

という形にも書かれる．このような姿に書かれたものは積公式が簡単である．実際

$$(P_s(a)P_s(b)u(w) = \iint_D A(w,\bar{v})(1-v\bar{v})^s B(v,\bar{x})u(x)(1-x\bar{x})^s dvd\bar{v}dxd\bar{x}$$

より，$C(w,\bar{x}) = \int_D A(w,\bar{v})(1-v\bar{v})^s B(v,\bar{x})dvd\bar{v}$ とすれば，

$$(P_s(a)P_s(b)u(w) = \int_D C(w,\bar{v})(1-v\bar{v})^s u(v)dvd\bar{v}$$

と書かれる．A から a を求める公式は面倒なので詳しく分かっていないが，ともかく何らかの方法できめられるものである．

ここで，$s < s'$ の時 $\mathcal{H}^{(s)}(D) \subset \mathcal{H}^{(s')}(D)$ であったことを思い出して $\mathcal{H}^{\infty}(D) = \bigcup_{s>-1} \mathcal{H}^{(s)}(D)$ としよう．$\mathcal{H}^{\infty}(D)$ に対しては帰納極限位相というのを入れて考えるのだが，今のところ気にする必要はない．

ここで，ベレーズィンの作用素 $P_s(a)$ は a をきめてしまえば $s > s_0$ なる全ての s に対して一斉に定義され，$P_{s'}(a)$ は $P_s(a)$ の拡張になっている．つまり，定義域を目いっぱい拡大してみればこれは $\mathcal{H}^{\infty}(D)$ から $\mathcal{H}^{\infty}(D)$ への作用素と見ることができる．そこで，これまでに定義された作用素を $\mathcal{H}^{\infty}(D)$ 上の演算子と見て，新しく積 $* = *_s$ を演算子の積として定義する．つまり，

$$P_s(a *_s b) = P_s(a)P_s(b); \quad s \gg 0$$

と定義しよう．$a*b$ は径数 s 毎に決まるものだが，$D \times \bar{D}$ 上の正則関数として求まることはむしろまれであろう．それにもかかわらず，我々は $a*b$ を何か径数 s を含む関数 $c(w,\bar{v},s)$ だと考えてしまうのである．これは超関数のようなものまで含まれているが，演算子と見てしまえば，加減や積が自由に行なえる．しかし，積は非可換である．定義より積 $*$ は結合律 $A*(B*C) = (A*B)*C$ をみたしている．

ここで，次のことに注意してもらいたい：

$$P_s(\bar{w} * w) = P_s(\bar{w} \cdot w) \neq P_s(w * \bar{w}), \quad P_s((\bar{w} \cdot w)^k) \neq P_s((\bar{w} \cdot w)_*^k).$$

そこで，$(\bar{w} * w)_*^{-1}$ を $\bar{w} * w$ の $*$-積に関する逆元としよう．すると $w^{\bullet} = (\bar{w} * w)_*^{-1} * \bar{w}$ は w の左逆元であり，$\bar{w}^{\circ} = w * (\bar{w} * w)_*^{-1}$ は $\bar{w}$ の右逆元で

あることが分かる．つまり，

$$\begin{aligned} &((\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w})*w=1, \quad w*((\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w})=1-\varpi_0, \\ &\bar{w}*(w*(\bar{w}*w)_*^{-1})=1, \quad (w*(\bar{w}*w)_*^{-1})*\bar{w}=1-\varpi_0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

但し ϖ_0 は射影演算子 $P_s(\varpi_0)(f)=f(0)$ に対応する元である．従ってこれは積分を定義する時に使っていた・積を使っても表示できるはずだが，これは簡単ではない．

その理由は $(\bar{w}*w)_*^{-1}$ が積分演算子として表示されていないからであるが，これを表示するにはモイヤル積の所でやったように，$\int_0^\infty e_*^{-t\bar{w}*w}dt$ を計算しないといけない．ϖ_0 は3章の公式(3.27)を使って

$$\varpi_0=\lim_{t\to\infty} e_*^{-tw*\frac{\bar{w}}{1-\bar{w}w}}=\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{s}w\partial_w}$$

として求められると思われるが，これを積公式で書き上げるのはやさしくない．

補題8.1と，式(8.14)を見比べると，

$$P_s(\varpi_0)h(w)=\int_D A(z,\bar{v})(1-v\bar{v})^s u(v)dvd\bar{v}, \quad A(z,\bar{v})=1$$

としてよい．

式(8.15)は $\bar{w}*w$ が $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ で可逆という事を示している．また，(8.12)より，

$$(P_s(1-\bar{w}*w))^{-1}u(w)=(P_s((1-\bar{w}*w)_*^{-1})u)(w)=\sum_k a_k w^k\frac{s+k+2}{s+1}$$

となる．これは非有界作用素だが，これを使うと

$$P_s((1-\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w})u(w)=\frac{1}{s+1}u'(w), \quad s>-1 \tag{8.16}$$

が分かる．

$P_s((1-\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w})=\frac{s}{s+1}P_s(\frac{\bar{w}}{1-w\bar{w}})$ が成立することに注意しておこう．

式(8.15)より，$w*(\bar{w}*w)^{-1}*(1-\bar{w}*w)=w*(\bar{w}*w)^{-1}-w$ は $(1-\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w}$ の右逆元である．実際

$$P_s(w*(\bar{w}*w)^{-1}-w)=(s+1)\int_0^w\{\}dw$$

であることが容易に確かめられる．(8.12)より次のことも分かる：

補題 8.6 $1-\bar{w}*w$ は可逆であり，かつ $(1-\bar{w}*w)^{-1/2}$ も作用素として定義できる．

(8.17)より，$\bar{z}=(1-\bar{w}*w)^{-1}*\bar{w}$ と置けば，z の左逆元 $z^{\bullet}$ が

$$(\bar{z}*z)^{-1}*\bar{z}=(1-\bar{w}*w)*(\bar{w}*w)^{-1}*(1-\bar{w}*w)^{-1}*\bar{w}$$

で与えられる．これより，

$$P_s(z^{\bullet})(w^m)=\begin{cases} w^{m-1}, & m>0, \\ 0, & m=0 \end{cases}$$

が分かり，従って次の定理が得られる：

定理 8.1 $w^*=(1-\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w}$ は w の量子共役変数である．つまり，$[w,w^*]=-\frac{1}{s+1}$ である．さらに

$$[w,\bar{w}]=-\frac{1}{s+1}(1-w*\bar{w})*(1-\bar{w}*w)$$

である．一方

$$[w*(1-\bar{w}*w)^{-\frac{1}{2}},(1-\bar{w}*w)^{-\frac{1}{2}}*\bar{w}]=-\frac{1}{s+1}$$

でもある．

証明 最初のこと，つまり $-\frac{1}{s+1}=[w,(1-\bar{w}*w)^{-1}*\bar{w}]$ はこれまでのことより明らかであろう．この式の右辺を [,]-積のライプニッツ則を用いて計算して

$$-\frac{1}{s+1}=(1-\bar{w}*w)_*^{-1}*[w,\bar{w}]*w*(1-\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w}+(1-\bar{w}*w)^{-1}*[w,\bar{w}]$$

これに球撞き補題を用いると，右辺は

$$(1-\bar{w}*w)_*^{-1}*[w,\bar{w}]*((1-w*\bar{w})_*^{-1}*w*\bar{w}+1)=(1-\bar{w}*w)_*^{-1}*[w,\bar{w}]*(1-w*\bar{w})_*^{-1}$$

となり，これより第二の式が得られる． □

それに対し

$$P_s(((1-\bar{w}*w)_*^{-1}*\bar{w})^k)=\frac{1}{(s+1)^k}u^{(k)}(w)$$

であるから，こちらは $s>-1$ で定義されている．

$\mathbb{D}_{(s)}$ を $w,\bar{w}$, $(\bar{w}*w)^{-1}$, $(1-\bar{w}*w)^{-1}$, $(1-w*\bar{w})^{-1}$ で生成された作用素の代数とする．

8.1.1 $SU(1,1)$ の作用

最後にこの代数 $\mathbb{D}_{(s)}$ の上に群

$$SU(1,1)=\left\{\begin{pmatrix} a, & b \\ \bar{b}, & \bar{a}\end{pmatrix};\quad a,b\in\mathbb{C}, |a|^2-|b|^2=1\right\}$$

が自然に自己同型群として働くことを示そう．

そのためには $SU(1,1)$ が $e^{i\theta}I$, $\begin{pmatrix} \sqrt{t^2+1} & t \\ t, & \sqrt{t^2+1}\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ で生成されていることを使うと，$e^{i\theta}$ が自己同型群として働くのは明らかだから，二番目のものを考える．

$$w'=(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1}*(\sqrt{t^2+1}w+t)=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}-(t^2w+t\sqrt{t^2+1})$$

だから，

$$\begin{aligned}
[w',\bar{w}'] &= \frac{1}{t^2}[(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1},(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})^{-1}] \\
&= \frac{1}{t^2}(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1}*(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})^{-1} \\
&* [tw,t\bar{w}]*(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})^{-1}*(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1} \\
&= 2\mu*(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1}*(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})^{-1} \\
&\quad *(1-\bar{w}*w)*(1-w*\bar{w})*(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})^{-1}*(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1} \\
&= 2\mu*(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1}*(1-w*\bar{w})*(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})^{-1} \\
&\qquad *(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})^{-1}*(1-\bar{w}*w)*(tw+\sqrt{t^2+1})^{-1} \\
&= 2\mu*(1-w'*\bar{w}')*(1-\bar{w}'*w').
\end{aligned}$$

ここで，球擡き補題より，

$$(1-\bar{w}*w)^{-1}*(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})=(t\bar{w}+\sqrt{t^2+1})*(1-\bar{w}*w)^{-1}$$

となる事を使い，これの逆元をとった等式を使っている．

以上見て来たようにベレーズィンの代数は一応ワイル代数とは何の関係も無いように見えるし，$\hbar$ にあたるものまで作用素になっている．これを，ワイル代数と関係づけることを考えよう．

8.1.2 リーマンの写像定理

$\mathbb{R}$ の任意の単連結領域は開区間であり，それらは全て $\mathbb{R}$ 自身に C^∞ 同相である．複素変数の場合も似たような事情があって，$\mathbb{C}$ 自身と異なる単連結領域が実は単位開円盤と複素同相である．

リーマン(Riemann)の**写像定理**と呼ばれている定理を説明しておこう．定理の説明はするが証明は省略する．

定理 8.2 $\mathbb{C}$ 自身と異なる $\mathbb{C}$ 内の任意の単連結開領域 D は単位開円盤 Δ と複素解析的に同相である．この同相を与える関数 $f: D \to \Delta$ は D 内に点 z_0 を勝手に指定して，$f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ となるように作ることができ，しかもこの条件で一意的である．

一意性の証明は次の事実から簡単に分かる．

命題 8.2 単位開円盤 Δ から自分自身への複素解析的同相写像は次のような一次分数変換に限る：

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

しかも，この一次分数変換が原点を原点に写し，かつ原点での微分が $f'(0) > 0$ (値が正の実数)となるならば，実はそれは恒等変換である．

証明のやり方から，例えば単連結開領域 D が径数 t に C^∞ に依存していたとすると $f_t : D_t \to \Delta$ も径数 t に C^∞ に依存するように作れる．これはかなり難しい証明になってしまうから，ここではそれは行なわない．

単連結開領域 D から単位開円盤 Δ への正則同型写像を $\varphi : D \to \Delta$ とする．上で述べたことは全てこの写像で D 上に写して考えられる．従って，我々は任意の単連結 D 上で $\mathbf{W}_2(D)$ にあたるものを考えることができる．

8.2 ポアンカレの円盤

複素変数の微積分の代数を考えるときには，単連結領域が $\mathbb{C}$ 自身でなければリーマンの写像定理により，単位円盤で話をすれば良い．この節ではまず，

単位円盤上の複素微積分の代数を考えることにする．

$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ の中で，$z=u+iv$, $\bar{z}=u-iv$ と置く．$z, \bar{z}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元でもあるが，u, v を実数に束縛しているわけではないので，z と $\bar{z}$ は独立である．

非可換な代数の中で領域を制限して考えることは，かなり難しい原理的な問題を含んでいる．つまり，生成元の動く範囲を制限するということの代数的な表し方が全く未解決のまま進まねばならないからである．

前の方の補題の証明の副産物として $z\bar{z}$ も離散描像を持つのだが，さらに次のことも分かる：

補題 8.7 $\hbar>0$ とすると，$z\bar{z}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で二つの逆元 $(z\bar{z})_+^{-1}, (z\bar{z})_-^{-1}$ を持つ．

前の章でやったことだが，$\zeta+z\bar{z}$ も $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で二つの逆元 $(\zeta+z\bar{z})_\pm^{-1}$ を持ち，$(\zeta+z\bar{z})_+^{-1}$,$(\zeta+z\bar{z})_-^{-1}$ はそれぞれ

$$\zeta\in\mathbb{C}-\{-\hbar(2n+1);n=0,1,2,\ldots\},\quad \zeta\in\mathbb{C}-\{\hbar(2n+1);n=0,1,2,\ldots\}$$

に解析接続される．これは $z\bar{z}$ は

$$\{\hbar(2n+1);n=0,1,2,\ldots\}\quad \text{または}\quad \{-\hbar(2n+1);n=0,1,2,\ldots\}$$

を動く不定元のように思って良いことを意味するが，二種類の逆元を同時に使うと発散を背負うから，以下では $z\bar{z}$ は $\{\hbar(2n+1);n=0,1,2,\ldots\}$ を動く不定元として扱い．$(\zeta+z\bar{z})_+^{-1}$ のみを使うことにする[注1]．

補題 8.7 より無論

$$(\bar{z}*z)_+^{-1},\ (1+\bar{z}*z)_+^{-1}\ \in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$$

であり，これらは可換である．さらに，ラプラス変換の公式を使うと，

$$\sqrt[*]{\bar{z}*z}^{\,-1},\ \sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{\,-1},\ \in\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$$

等も定義でき，$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元である．

注1 これは一つの局面を選んだことを意味し，こうすると $\bar{z}*z$ は $\{2\hbar n;n=1,2,3,\ldots\}$ を動く不定元として扱われることになる．これは作用素表現の時の表現空間を選んでいることに対応していると思われるが，それよりはるかに弱い要求だと思われる．

$1+z{*}\bar{z}=1+\bar{z}{*}z-2\hbar$ だから $\bar{z}{*}z=2\hbar m,\ m=1,2,\ldots$ という離散描像からすれば次のことは明らかであろうが，モイヤル積公式と積分を使った逆元の計算で次が証明できる：

補題 8.8 $(1+z{*}\bar{z})_{+}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e_*^{1+z*\bar{z}}dt$ も $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で存在する．

次の補題は第二結合律定理を利用して結合律を保証するのに使われる：

補題 8.9 u,v を $\mathbb{R}$ に束縛した場合には $(1+\bar{z}{*}z)_{+}^{-1}$, $\sqrt[*]{1+\bar{z}{*}z}^{-1}$, $(1+z{*}\bar{z})_{+}^{-1}$ は $\hbar\to 0$ まで定義され，しかも $\hbar$ に関して解析的である．

証明 $\sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{-1}$ で示すが，他の場合もほとんど同じ証明になる．これはラプラス変換の公式を使って

$$\sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}e_*^{-t(1+\bar{z}*z)}dt$$

と定義されている．$e_*^{-t(1+\bar{z}*z)}=e^{-t}e_*^{-t\bar{z}*z}$ であるからこの積分は $\hbar\to 0$ まで連続に定義されていて，しかも $\hbar$ について解析的である． □

$(\bar{z}{*}z)_{+}^{-1}$ については e^{-t} の部分がないからこうはいかないことは明らかであろう．

ここで，複素共役構造を考慮して次のように置く：

$$w=z*\sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{-1}\qquad \bar{w}=\sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{-1}*\bar{z}. \tag{8.17}$$

すると，

$$1-\bar{w}*w=(1+\bar{z}*z)^{-1}\quad 従って\quad 1+\bar{z}*z=(1-\bar{w}*w)^{-1}$$

となる．これより $w*\sqrt[*]{1-\bar{w}*w}^{-1}=z$, $\sqrt[*]{1-\bar{w}*w}^{-1}*\bar{w}=\bar{z}$ も分かる．

球撞き補題を使うと

$$w=\sqrt[*]{1+z*\bar{z}}^{-1}*z,\quad \bar{w}=\bar{z}*\sqrt[*]{1+z*\bar{z}}^{-1}$$

$$1-w*\bar{w}=(1+z*\bar{z})^{-1}\quad 従って\quad 1+z*\bar{z}=(1-w*\bar{w})^{-1}$$

等は容易に得られる．

これらの計算から，結合律を使って次が分かる：

$$[w, \bar{w}] = -2\hbar(1 - w{*}\bar{w}) * (1 - \bar{w}{*}w). \tag{8.18}$$

しかし，$\bar{z}{*}z$ の離散描像を使えば $\bar{w} * w$ は $\{\frac{2\hbar(k+1)}{1+2\hbar(k+1)}; k = 0, 1, 2, \ldots\}$ を動く不定元として扱われる．しかも前の(8.12)式は $P_s(\bar{w})P_s(w)$ の固有値が $\frac{k+1}{k+1+s+1}, k = 0, 1, 2, \ldots$, ということだったから，$2\hbar = \frac{1}{s+1}$ としてみれば，

$$\bar{w} * w = 1 - (1 + \bar{z} * z)^{-1} = (1 + \bar{z} * z)^{-1} * \bar{z} * z$$

となり $\bar{w} * w$ の離散描像と一致する．

従って，$P_s(\bar{w}w) = P_s(\bar{w})P_s(w)$ は $= P_s(\bar{w} * w)$ と考えるべきだから，$\bar{w} * w = \bar{w}w$ であり，ベレーズィン代数の中では反正規順序表示が使われていることが想像できる．

しかし，このことは一応の想像に過ぎない．つまり，ベレーズィン代数の作用素表示の中で使われている可換積がいかなる順序表示によるものかははっきりしないのである．もしかすると，正規順序とか反正規順序表示とかとは全く関係ない順序表示が使われているのかもしれないわけで，これは量子正準共役対なるものは非線型のものまで考えればいくらでもあるのだから，そうであっても何も不思議はないのである．

古典的には，ポアンカレ円盤は複素単位円盤 D に $\{w, \bar{w}\} = (1 - w\bar{w})^2$ なるポアソン構造の入ったものと理解出来る．従って，これの量子化された代数は，例えば

$$[w, \bar{w}] = -2\hbar(1 - w{*}\bar{w}) * (1 - \bar{w}{*}w)$$

のような交換関係を満たす代数ではないかと一応は想像できる．$\bar{w} * w = (1 + \bar{z} * z)^{-1} * \bar{z} * z$ だから，何やら $\bar{w} * w < 1$ という雰囲気も出ているし，交換関係も古典的なものの量子化のように見える．しかし，これだけでは単なる辻褄合わせにすぎない．もう少し数学的な理由づけが欲しいわけである．

$w, \bar{w}, (1 - \bar{w} * w)^{-1}$ が完備ワイル空間の中で生成する代数を非可換ポアンカレ円盤と呼びたいのだが，このように呼ぶ理由は次のことが成立するからである：

定理 8.3 $|c| \geq 1$ ならば $c+w$, $c+\bar{w}$ は u,v に関する整関数の空間 $Hol(\mathbb{C}^2)$ の中で逆元を持つ.

証明 $w = z * \sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{-1}$ は $w=w(u,v)$ として $Hol(\mathbb{C}^2)$ の元であり, w_*^n も同様である. $(1-w)_*^{-1}$ の存在を言えば十分であろう.

そこで, $\sum_n w_*^n$ を計算し, これが $Hol(\mathbb{C}^2)$ の広義一様位相で収束することを示すのである. 計算にはまず

$$w = \sqrt{\pi}\int_0^\infty \sqrt{t}^{-1} z * e_*^{-t(1+\bar{z}*z)} dt$$

を使う. $(\bar{z}*z)*z = (z*\bar{z}+2\hbar)*z = z*(2\hbar+\bar{z}*z)$ と球擡き補題を使うと

$$e_*^{-t(\alpha+\bar{z}*z)} * z = z * e_*^{-t(2\hbar+\alpha+\bar{z}*z)}$$

が得られるから, これをを使って

$$w_*^m = \sqrt{\pi}^m \int\cdots\int_0^\infty (\prod_{k=1}^m t_k)^{-1/2} e^{-\sum(t_k(1+2(m-k)\hbar))} z^m * e_*^{-(\sum t_k)\bar{z}*z} dt$$

が得られる. そこで積分記号の中の $*$-積を計算する. 公式(3.13)を使って

$$z^m * e_*^{-t\bar{z}*z} = e^{-\hbar t}\frac{1}{\cosh(\hbar t)} z^m * e^{-\frac{z\bar{z}}{\hbar}\tanh(\hbar t)}$$

だから, これをモイヤル積公式(1.10)で計算すると,

$$z^m * e_*^{-t\bar{z}*z} = e^{-\hbar t}\frac{1}{\cosh(\hbar t)}(1+\tanh\hbar t)^m z^m e^{-\frac{z\bar{z}}{\hbar}\tanh(\hbar t)}$$

となるから, これを代入して w_*^n を多重積分で書いた式を書くと $\tau = t_1+t_2+\cdots+t_m$ として,

$$w_*^m = \sqrt{\pi}^m \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \Big(\prod_{k=1}^m t_k\Big)^{-1/2} e^{-\sum(t_k(1+(2(m-k)+1)\hbar))}$$
$$\frac{1}{\cosh(\hbar\tau)}(1+\tanh\hbar\tau)^m z^m e^{-\frac{z\bar{z}}{\hbar}\tanh(\hbar\tau)} dt_1 dt_2\cdots dt_m.$$

$\tau \geq 0$ だから, $1+\tanh\hbar\tau \leq 2$, $e^{-\frac{z\bar{z}}{\hbar}\tanh(\hbar\tau)} \leq 1$ としてよく, また $\cosh(x+y) \geq \cosh x\cosh y$ だから, $2\cosh x \geq e^x$ も使って

$$|w_*^m| \leq \prod_{k=1}^m \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{t_k}} e^{-\sum(t_k(1+(2(m-k)+1)\hbar))} e^{-t_k\hbar} dt_k (2|z|)^m.$$

右辺は, $\prod_{k=1}^m \frac{2|z|}{\sqrt{1+2k\hbar}}$ となる. 任意に固定したコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対して $2|z| \leq C_K$ となる $C_K > 1$ をとり, 任意に固定した $\hbar > 0$, および $\lambda, 0<\lambda<1$ に対して $C_K^2 \leq \lambda(1+2k\hbar)$ を満たす最小の自然数を k_0 とする. すると,

$$\sum_{m=k_0}^{\infty} |w_*^m| \leq C_K^{k_0} \frac{1}{1-\lambda}$$

が得られる．

この収束は z に関して何回微分しても全く同様の計算である．つまり，C^∞ 位相で収束する． □

$Hol(D)$ の元は収束半径が 1 以上の無限級数で書かれる．これを $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ と書いたとき，この ζ の所に $w = z * \sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{-1}$ を代入することができる．収束半径の計算というのは等比級数との比較で求めていたことを思い出せば，上の定理とほぼ同じ証明で次のことが分かる：

系 8.1 $Hol(D)$ の任意の元 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ に対して,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z * \sqrt[*]{1+\bar{z}*z}^{-1}\right)_*^k$$

は $Hol(\mathbb{C}^2)$ の広義一様位相で微分をこめて収束する．つまり，C^∞ 位相で収束する．

$\bar{z}*z$ については，何の束縛も与えていないし，$\bar{z}*z$ の離散描像を使った訳でもないから $z, \bar{z}$ は独立に動く．それにもかかわらず，上のようなことが言えるというのだからかなり奇妙にも見えることである．

$\mathbf{W}_2(D)$ を完備ワイル空間の中で

$$\hbar,\ w,\ \bar{w},\ (\bar{w}*w)^{-1},\ (\lambda-\bar{w}*w)^{-1},\ (\lambda-w*\bar{w})^{-1}\ (\lambda>1),$$
$$(c+w)^{-1},\ (c+\bar{w})^{-1}\ (|c|\geq 1)$$

で生成された代数とし，これを**非可換ポアンカレ円盤** と呼ぶ．

ここでは，複素共役と量子正準共役とは違っており，w の量子正準共役は $(1-\bar{w}*w)^{-1}*\bar{w}$ である．$[w, (1-\bar{w}*w)^{-1}*\bar{w}] = -2\hbar$ はこれを定義に従って素直に計算して確かめられる[注2]．

注2 この代数を $\mathbb{C}^2$ から簡約で得る方法もある．9.2 節が参考になる．

8.2.1 真空，真空表現

前節で作った代数の真空表現を考えよう．しかし真空の設定と複素共役構造の設定は注意深く行なわないと発散を含んでしまうので用心する必要がある．

$\bar{z}^\circ = z*(\bar{z}*z)^{-1}$ は $\bar{z}$ の右逆元であり，$\bar{z}*\bar{z}^\circ = 1-\tilde{\varpi}_0$ だから，ここでは $\tilde{\varpi}_0$ を使う．$\tilde{\varpi}_0 \in \mathbf{W}_2(D)$ である．しかも $\bar{z}*\tilde{\varpi}_0 = 0$ だったから，$\bar{w}*\tilde{\varpi}_0 = 0$ にもなっている．

補題 8.10

$$e_*^{-t\bar{z}*z} * \tilde{\varpi}_0 = e^{-2t\hbar}\tilde{\varpi}_0.$$

証明　$e_*^{-t\bar{z}*z}$ は微分方程式 $\frac{d}{dt}e_*^{-t\bar{z}*z} = -e_*^{-t\bar{z}*z} * \bar{z} * z$ をみたすから，

$$\frac{d}{dt}(e_*^{-t\bar{z}*z}) * \tilde{\varpi}_0 = -2\hbar e_*^{-t\bar{z}*z} * \tilde{\varpi}_0.$$

$t=0$ の初期条件は $\tilde{\varpi}_0$ だから，この条件で上の微分方程式は一意的に解けて $e^{-2t\hbar}\tilde{\varpi}_0$ のみが答となる．□

これを使って計算すると，

$$(\bar{z}*z)^{-1} * \tilde{\varpi}_0 = -\int_0^\infty e^{-2t\hbar}dt\tilde{\varpi}_0 = \frac{1}{2\hbar}\tilde{\varpi}_0$$

などと計算される．大切なことは，$\tilde{\varpi}_0$ の左側には w の関数しか来ないようにできるということである．つまり $\mathbf{W}_2(D) * \tilde{\varpi}_0 = Hol(D) * \tilde{\varpi}_0$ である．

真空表現というのは 3 章で述べたように

$$\hat{f} : Hol(D) * \tilde{\varpi}_0 \to Hol(D) * \tilde{\varpi}_0, \quad h * \tilde{\varpi}_0 \mapsto f * h * \tilde{\varpi}_0$$

のことだが，いくつか例を書くと，

$$\hat{w}_*^m = w_*^m *, \quad ((1-\bar{w}*w)^{-1} * \bar{w})^\wedge = -2\hbar\partial_w$$

のようになっている．w の量子正準共役は $(1-\bar{w}*w)^{-1}*\bar{w}$ であり，これが真空表現では微分 $2\hbar\partial_w$ に対応するが，これの右逆元に $w*(\bar{w}*w)^{-1} - w$ があり，これが積分 $\frac{1}{2\hbar}\int_0^w dw$ となる．さらに

$$(\tilde{\varpi}_0)^\wedge = \{h_*(w) * \tilde{\varpi}_0 \mapsto h_*(0) * \tilde{\varpi}_0\}$$

等となる.

これらのものが $2\hbar$ を $\frac{1}{s+1}$ に置換えると前の節でやったベレーズィン作用素と同じものだということは見比べて分かるのだが，ベレーズィン作用素は実は可換積を使った積分で与えられているし，$\hbar$ 自身も作用素に表現されていることになるから，このままでは自然な対応には見えない.

8.2.2　接触ワイル代数の構成

そこで，$\hbar$ を作用素にする方法を考えよう．この作業はあまり注目されないことが多いが，代数のレベルではワイル代数を接触代数(contact algebra)に拡張しているもので，代数の表現を作るときには重要な働きをするステップである.

$\mathcal{H}^s(D)$ を D 上で正則で

$$\int_D |f(w)|^2(1+|w|^2)^s|dwd\bar{w}| < \infty$$

となる関数の全体とする．これは自然にヒルベルト空間となる．その内積を $\langle f, g\rangle_s$ とする．$\{\mathcal{H}^s(D); s \in \mathbb{R}_+\}$ を $\mathbb{R}_+$ 上の自明なベクトル束と見てその切断の空間に内積

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty \langle f(s), g(s)\rangle_s ds$$

を入れて新しくヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を作る．各 $\mathcal{H}^s(D)$ は $\mathrm{ad}((2\hbar)^{-1})$ の固有値 s の固有空間と考えられるようにしたいのである.

そのためには7.3.4節でやったように，τ という変数を一つ増やして $\mathcal{H}^s(D)$ を $\mathcal{H}^s(D) * e_*^{s\hbar*\tau}$ と考え，さらに交換関係を $[(2\hbar)^{-1}, e_*^{s\hbar*\tau}] = se_*^{s\hbar*\tau}$ で与えて，さらに $(2\hbar)^{-1} * \tilde{\varpi}_0 = \tilde{\varpi}_0$ とするのである.

こうなっておれば，$(2\hbar)^{-1} * e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi}_0 = (s+1)e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi}_0$ だから，逆数を取って

$$(2\hbar) * e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi}_0 = \frac{1}{s+1} e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi}_0$$

が得られて好都合である．任意の $f(u)$ に対して

$$(2\hbar) * f(u) * e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi}_0 = \frac{1}{s+1} f(u) * e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi}_0$$

だから，真空表現の中では $2\hbar=\frac{1}{s+1}$ と置くことができるからである．

しかし，$[u,v]=-\hbar i$ だったから，上のような交換則や真空とのかかわりを勝手に持って来るわけにはいかない．

そこで τ という変数を一つ増やし，交換関係を

$$[\tau,u]=u,\quad [\tau,v]=v,\quad [\tau,\hbar]=2\hbar$$

と設定して代数を作る．これは前の方で**接触ワイル代数**と呼んでいた代数で $\mathcal{C}_3$ と書かれていたものである．こうすると，$\mathrm{ad}(\tau)$ はワイル代数 W_2 の微分になり $[\tau,\hbar^{-1}]=-\hbar^{-1}2\hbar\hbar^{-1}=-2\hbar^{-1}$ だから，$[(2\hbar)^{-1},e_*^{s\hbar\tau}]=se_*^{s\hbar\tau}$ である．

接触ワイル代数の 完備ワイル代数への埋め込み

これで一応うまくいっているが，接触ワイル代数なるものがはたしてどの程度の代数なのか不安であろう．そこで接触ワイル代数を完備ワイル空間の中へ埋め込んで考えられるようにしよう．

まず，天下りに (u_1,v_1,u_2,v_2,ν) で生成されるワイル代数 W_4 を考える（第1章参照）．但し前の方で $\hbar$ と書いていたものをここでは ν と書くことにする．（この ν は後で 1/2 と置く.）

W_4 を $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^4)$ に埋め込むのは前のほうのやり方をまねれば容易であろう．この中で次のように置く：

$$\tau=iu_1,\quad z=e^{\frac{1}{\nu}v_1}(u_2+iv_2),\quad \bar{z}=e^{\frac{1}{\nu}v_1}(u_2-iv_2),\quad \hbar=\nu*e^{\frac{2}{\nu}v_1}. \tag{8.19}$$

すると，容易な計算で

$$[\tau,\hbar]=2\hbar,\quad [\tau,z]=z,\quad [\tau,\bar{z}]=\bar{z},\quad [z,\bar{z}]=-2\hbar$$

が分かる．わざわざ $\bar{\tau}=-\tau$ にしている理由は $\iota(\hbar)=\hbar$, $\iota(z)=\bar{z}$, $\iota(\tau)=-\tau$ と置いて，対合的反自己同型が定義できるようにしたいためである．

これで接触ワイル代数 $\mathcal{C}_3$ は式(8.19)を埋め込み写像と見て $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^4)$ の中に埋め込まれることが分かる．しかも，$e_*^{t\tau}=e^{t\tau}\in\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^4)$ である．

W_2 をこれまで使って来た，u,v, $[u,v]=-\hbar i$ で作ったワイル代数とし，

$z = u + iv, \bar{z} = u - iv$ と置いたものとする.

命題 8.3 上の埋め込みによる W_2 の像を $\tilde{W}_2$ とすると, $\mathrm{Ad}(e_*^{t\tau})$ は $\tilde{W}_2$ の上の $\mathrm{Ad}(e_*^{t\tau})(\hbar) = e^{2t}\hbar$, $\mathrm{Ad}(e_*^{t\tau})(z) = e^t z$,$\mathrm{Ad}(e_*^{t\tau})(\bar{z}) = e^t \bar{z}$ をみたす自己同型群となる. このようなものを, **拡張的自己同型群**(expansive automorphism group) と呼ぶ.

これだけだと, $t \in \mathbb{C}$ でかまわないようにみえるが,

$$e_*^{s\hbar * \tau} = e_*^{s(i\nu * e^{\frac{2}{\nu}v_1} * u_1)} \tag{8.20}$$

であるから, このような元を $*$-指数関数として定義しないといけないので, これを方程式

$$\frac{d}{ds}f_s = i\nu * e^{\frac{2}{\nu}v_1} * u_1 * f_s, \quad f_0 = 1$$

の解として定義するのだが, そのためには 7.3 節でやったように, まず u_1, v_1 や s, t の動く範囲を実数に制限しておかねばならない.

こうしておけば, s に関して実解析的な解が初期値に関して一意的であることを使えば, 両辺が同じ微分方程式を満たしていることから $[(2\hbar)^{-1}, e_*^{s\hbar*\tau}] = se_*^{s\hbar*\tau}$ も分かる. 真空にあたるものとしては,

$$\tilde{\varpi} = 2e^{\frac{2i}{\nu}u_1 v_1} * 2e^{\frac{2}{\nu}(u_2 + iv_2)(u_2 - iv_2)}$$

を取れば,

$$(2\hbar) * 2e^{\frac{2i}{\nu}u_1 v_1} = 2\nu * e^{\frac{2}{\nu}v_1} * 2e^{\frac{2i}{\nu}u_1 v_1} = 2\nu * 2e^{\frac{2i}{\nu}u_1 v_1} \tag{8.21}$$

だから, $\nu = \frac{1}{2}$ としてやると

$$(2\hbar)^{-1} * e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi} = (s+1)e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi}$$

となって話がうまくいく. 7.3 節でやったように, $s \le -1$ では $e_*^{s\hbar*\tau} * \tilde{\varpi} = 0$ となっているのである.

しかし, これまで 2 変数のワイル代数について行ってきたことを, 今度は 4 変数のワイル代数にまで広げる必要がある. しかし,

$$\begin{aligned}\bar{z} * z &= e^{\frac{1}{\nu}v_1}(u_2 - iv_2) * e^{\frac{1}{\nu}v_1}(u_2 + iv_2) = e^{\frac{2}{\nu}v_1}(u_2^2 + v_2^2 + 2\nu), \\ z\bar{z} &= e^{\frac{2}{\nu}v_1}(u_2^2 + v_2^2)\end{aligned}$$

だから，u_1, v_1 を実数 $\mathbb{R}$ に制限し，v_1 と u_2, v_2 の可換性を使えば，$(1+\bar{z}*z)^{-1}$ のようなものは v_1 を単なるパラメターとして，u_2, v_2 のみを使った計算から

$$(1+\bar{z}*z)^{-1} = e^{-\frac{2}{\nu}v_1}\left(e^{\frac{2}{\nu}v_1} + u_2^2 + v_2^2 + 2\nu\right)^{-1}$$

のように計算できてしまうので，さほど悪い関数空間の元ではないことが分かるのである．

表現空間としては

$$f_s(w) * e_*^{s\nu i * e^{\frac{2}{\nu}v_1} * u_1} * \tilde{\varpi}$$

の形のものを取るのである．

次のことはもはや明らかであろう：

定理 8.4 $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)$ 内で $*$-積を使って定義された代数 $\mathbf{W}_2(D)$ からベレーズィンの作用素代数の族 $\{\mathbb{D}_{(s)}; s \in \mathbb{R}_+\}$ の上への自然な同型対応が存在する．

証明 $2\hbar$ を各 $\mathcal{H}^s(D)$ に $\frac{1}{s+1}$ として働く作用素として表現すると，代数 $(\mathbf{W}_2(D), *)$ から $(\mathbb{D}_{(s)}, *)$ への自然な準同型があることは明らかであろう．

逆の対応を考えよう．

$$z = w * ((1-\bar{w}*w)^{-1/2}, \quad \bar{z} = (1-\bar{w}*w)^{-1/2} * \bar{w}$$

と置くと(8.12)式を用いた計算で $[z, \bar{z}] = -\frac{1}{s+1}$ が得られる．$(\mathbf{W}_2(D), *)$ は $z, \bar{z}$, $(\bar{z}*z)^{-1}$, $(1+\bar{z}*z)^{-1}$, $(1+z*\bar{z})^{-1}$ と上の交換関係で生成されていたのだからこれで逆の対応もあることが分かる． □

この代数 $\mathbb{D}_{(s)}$ は単位円盤 D 上でポアソン括弧積 $\{w, \bar{w}\} = (1-w\bar{w})^2$ で定義されるポアソン構造の変形量子化(deformation quantization)と見なされる．$\hbar$ にあたるものも表現されていることに注意してもらいたい．

これで分かるように，ベレーズィンの代数というのは $(\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2); *)$ の中に作られているとは言え，一つの閉じ切った代数を形成しているのである．

ここで問題が一つ生ずる，リーマンの写像定理により，$\mathbb{C}$ 自身と異なる $\mathbb{C}$ 内の任意の単連結開領域 D は単位開円盤 Δ と複素解析的に同相であるから，これによって何もかも単位開円盤に写して考えればよいと言ったのだが，これがはたしてどの辺まで有効なのだろうか？ということである．

例えば，上半平面と Δ とはケーリー変換で複素解析的に同相であるし，確かにベレーズィンの代数 $\{\mathbb{D}_{(s)}; s\in\mathbb{R}_+\}$ はケーリー変換すると $[z,\bar{z}]=\hbar(z-\bar{z})^2$ の関係式をもった代数に変換される．これは $z=x+iy$ として x,y で書いてみると $[x,y]=-2\hbar iy^2$ ということだが，これと 6.4.2 節で扱ったコーエン・ランキン積がどんな関係にあるのか，よく分かっていない．

8.3　量子群

ベレーズィンの代数が非可換なポアンカレ円盤として $*$-積の言葉で一応理解できたから，こんどは最近良く話題になる「量子群」なるものが $*$-積の言葉でどのように見えるか考えてみよう．

群 G に対してその上の $\mathbb{C}$-値関数全体 $A(G)$ は自然に可換環の構造を持つが，群の構造も反映して自然に余代数(coalgebra)の構造も持つ．このように代数の構造と余代数(これは群という性質を代数の言葉に翻訳したものだと思っていて良い)の構造を合わせ持ったものを**ホップ(Hopf)代数**と呼ぶ．

量子群と呼ばれるものはこの $A(G)$ の部分が非可換結合代数になっていて，さらにホップ代数の構造も持っているものを言うのであるが，ここで考える量子群は一般のものでなく，量子群 $SU_q(2)$ と呼ばれているものである．

これは，余代数の構造(後で詳しく述べる)を見ていると群 $SU(2)$ に見えるのだが，関数環にあたる $A(SU_q(2))$ が代数としては非可換なものである．

以下に述べることはボロノヴィッツ(Woronowicz) [9] の発見によるものである．ボロノヴィッツの代数 $A(SU_q(2))$ は X,U,V,Y と次に述べる関係式で生成されたものである：

$$\begin{cases} U*X=qX*U, \quad V*X=qX*V, \\ Y*U=qU*Y, \quad Y*V=qV*Y, \qquad U*V=V*U, \\ X*Y-q^{-1}U*V=Y*X-qU*V=1. \end{cases}$$

ここで量子パラメター q は正数で，共役構造は生成元のところで

$$X^\dagger=Y,\ Y^\dagger=X,\ U^\dagger=-q^{-1}V\ ,\ V^\dagger=-qU$$

として入れておく．

$A(SU_q(2))$ で上の共役構造の入った代数を表すことにする．これは同時にホップ代数の構造も持つので，これを量子群 $SU_q(2)$ の**座標環**と呼ぶ．この非可換な代数はブルバキ的言い方では "量子位相空間" $SU_q(2)$ 上に定義された "$\mathbb{C}$-係数多項式関数環" ということになるだろうが，無論 $SU_q(2)$ なる点集合的実体があるのではない．しかし，この代数はうまく位相を入れて完備化すると C^*-代数にもすることができるものである．

$SU_q(2)$ の余代数の構造というのは X, U, V, Y を

$$\begin{pmatrix} X, & U \\ V, & Y \end{pmatrix} \quad (X \text{ は } 1\times 1 \text{ 成分を表す関数のように思う})$$

のように行列で表示しておくと分かりやすい．$A(SU_q(2))$ の任意の元 f は $f(X, Y, U, V)$ のように X, Y, U, V の多項式として書けているから，これをあたかも

$$SU_q(2) \ni a \mapsto \begin{pmatrix} X(a), & U(a) \\ V(a), & Y(a) \end{pmatrix}$$

であるかのごとくに考えて余代数の構造を入れるのである．

余代数の構造は余積(coproduct) Δ, 余単位元(counit) ε,

$$\Delta : A(SU_q(2)) \to A(SU_q(2)) \otimes A(SU_q(2)), \quad \varepsilon : A(SU_q(2)) \to \mathbb{C}$$

および余逆(antipode) $S : A(SU_q(2)) \to A(SU_q(2))$ といったものからなるがそれらは次のように与えられている：

$$\Delta(X) = X \otimes X + U \otimes V, \quad \Delta(U) = X \otimes U + U \otimes Y,$$
$$\Delta(V) = V \otimes X + Y \otimes V, \quad \Delta(Y) = V \otimes U + Y \otimes Y,$$
$$\varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = 1, \qquad \varepsilon(U) = \varepsilon(V) = 0.$$
$$S(X) = Y, \quad S(Y) = X, \quad S(U) = -e^{-\hbar}U, \quad S(V) = -e^{\hbar}V$$

行列の積や逆行列をどのようにして作るのか書いてみれば上の余代数の構造は 2×2 行列の行列計算の構造を成分の動きに注目して書き上げたものだと分かる．しかし，ここでは余代数の構造についてはこれ以上深入りせず，もっぱら代

数のほうを考えることにする．

この節では "コンパクト量子リー群" $SU_q(2)$ 上の "関数"を非可換代数 $A(SU_q(2))$ として扱い，$SU_q(2)$ を "局所" 座標環の貼合せとして理解することを考える．

8.3.1　量子群 $SU_q(2)$ の代数の表示

ワイル代数の中で $z = u+iv$, $\bar{z} = u-iv$ と置く．$z{*}\bar{z} = z\bar{z}-\hbar$, $\bar{z}{*}z = z\bar{z}+\hbar$ である．u, v を実数に制限しているのではない．

量子群 $SU_q(2)$ の代数を得る為に，まず $\sqrt[*]{\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}}$ のような元を定義したい．そのために少し準備がいる：

$V_1(\xi)$, $V_{1/2}(\xi)$ を $\frac{1-e^{it}}{-it}$, $\sqrt{\frac{1-e^{it}}{-it}}$ の超関数としてのフーリエ変換とする．これを短絡的に

$$V_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{it}}{-it}e^{i\xi t}dt, \quad V_{1/2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1-e^{it}}{-it}}e^{i\xi t}dt$$

と書くのは良くないのだが，この式を直接使うのではないので我慢してもらうことにする．フーリエ逆変換を

$$\sqrt{\frac{1-e^{it}}{-it}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}V_{1/2}(\xi)e^{-i\xi t}d\xi$$

と書いてみて，t の所を it に変えると

$$\sqrt{\frac{1-e^{-t}}{t}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V_{1/2}(\xi)e^{t\xi}d\xi$$

となる．これを利用したいのである．

$V_1(\xi), V_{1/2}(\xi)$ を定義するときの被積分関数は t について C^∞ で，微分すればするほど収束性が良くなる．そのことを反映して $V_1(\xi)$, $V_{1/2}(\xi)$ は任意の自然数 m について $(1+|\xi|^2)^m V_1(\xi)$, $(1+|\xi|^2)^m V_{1/2}(\xi)$ はルベーグの意味で可積分関数となる．当然，合成積も定義できて

$$V_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}V_{1/2}(s)V_{1/2}(\xi-s)ds$$

であることが分っている．

そこで，$V_{1/2}(\xi)$ と式(3.25)を利用して，次のように天下りに定義する：

$$\sqrt[*]{\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}}=\int_{-\infty}^{\infty}V_{1/2}(\xi)e_*^{\xi z*\bar{z}}d\xi,\quad \sqrt[*]{\frac{1-e_*^{-\bar{z}*z}}{\bar{z}*z}}=\int_{-\infty}^{\infty}V_{1/2}(\xi)e_*^{\xi\bar{z}*z}d\xi \tag{8.22}$$

右辺は無論ワイル順序表示で (3.25)式を使って計算する．次の補題は容易に証明できるであろう：

補題 8.11 任意の自然数 m に対して $(1+|t|^2)^m f(t)$ が可積分関数となるような $f(t)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{e^{\hbar t}}{\cosh\hbar t}e^{(u^2+v^2)\frac{1}{\hbar}\tanh\hbar t}$$

は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元に収束する．

補題 8.11 により，(8.22)は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元として定義される．

演習問題 $\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}$ はどのように定義すべきかを考えて，次の等式を示せ：

$$\sqrt[*]{\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}}*\sqrt[*]{\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}}=\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}.$$

共役構造を $\iota u=u$ 及び $\iota v=v$, $\iota i=-i$ と置くことで定義する．
こうしておいて，次のように置く：

$$\begin{aligned}X&=\sqrt{\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}}*z,\quad Y=\bar{z}*\sqrt{\frac{1-e_*^{-z*\bar{z}}}{z*\bar{z}}},\\ U&=ie_*^{-\frac{1}{2}z*\bar{z}}*e^{i\vartheta},\qquad V=ie_*^{-\frac{1}{2}\bar{z}*z}*e^{-i\vartheta}.\end{aligned}\tag{8.23}$$

この置き方では，すべてが $Hol(\mathbb{C}^3)$ の中の元である．$e_*^{-\frac{1}{2}z*\bar{z}}\neq e^{-\frac{1}{2}(z\bar{z}-\hbar)}$ であるので注意しておく必要がある．さらに $q=e^{-\hbar}$ と置く．

次の式が成立していることに注意しておこう：

$$U=ie^{\frac{\hbar}{2}}e_*^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}e^{i\vartheta},\qquad V=ie^{-\frac{\hbar}{2}}e_*^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}e^{-i\vartheta}.$$

さらに $U*V=-e_*^{-z\bar{z}}$ でもある．

これらの公式を使って X, Y, U, V が座標環 $A(SU_q(2))$ を生成することは

上に定義した関係式を全部満たすことを調べて分かる：

例えば

$$
\begin{aligned}
Y * X =& \bar{z} * \frac{1 - e_*^{-z*\bar{z}}}{z * \bar{z}} * z = \bar{z} * z * \frac{1 - e_*^{-\bar{z}*z}}{\bar{z} * z} \\
=& 1 - e_*^{-z\bar{z}} e^{-\hbar} = 1 + qU * V,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V * X =& ie_*^{-\frac{1}{2}\bar{z}*z} * e^{-i\vartheta} * \sqrt{\frac{1 - e_*^{-z*\bar{z}}}{z * \bar{z}}} * z \\
=& \sqrt{\frac{1 - e_*^{-z*\bar{z}}}{z * \bar{z}}} * ie_*^{-\frac{1}{2}z*\bar{z}-\hbar} * e^{-i\vartheta} * z \\
=& qX * V.
\end{aligned}
$$

こんな訳で代数 $\mathcal{A}(SU_q(2))$ は自然に $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^3)$ の中に入っている結合代数と見なすことができる.

$\hbar = 0$ と置くと,

$$
\begin{pmatrix} X, & U \\ V, & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-e^{-z\bar{z}}}{z\bar{z}}}z, & ie^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}e^{i\vartheta} \\ ie^{-\frac{1}{2}\bar{z}z}e^{-i\vartheta}, & \sqrt{\frac{1-e^{-z\bar{z}}}{z\bar{z}}}\bar{z} \end{pmatrix} \tag{8.24}
$$

が得られる.

この表示は $SU(2)$ 上の任意の C^∞ 関数が $z, \bar{z}, e^{i\vartheta}$ の関数に $z = \infty$ で漸近展開に対する条件の形で境界条件が加わったものとして表示できるという事実とも合致する. $z = \infty$ で定義される集合は対角行列の全体(maximal torus)に対応している.

ここで $X * X$ は $Hol(\mathbb{C}^3)$ における普通の可換積 $X \cdot X$ とは違うということに注意してもらいたい. 可換代数は元の表示を一定にさせ $*$-積の計算を拡張させるためのいわば補助線の代数であることを思い出してほしい.

しかしポアソン構造 $\{\ ,\ \}$ の階数が変化する場所では $*$-積を可換代数の方から書き上げてくる公式は一般には複雑になる.

8.3.2　量子群 $SU_q(2)$ の代数を与えるもう一つの表示

まず空間を正確に定義しておこう. いきなり離散的描像が出るが

$$\tilde{S}_\hbar = \{z \in \mathbb{C}; |z| = e^{\frac{m\hbar}{2}},\ m \in \mathbb{Z}\}$$

とし，この上の点を $re^{i\theta}$ と表す．これとは別に単位円 S^1 を考えこの上の点を $e^{i\vartheta}$ と表す．この節では $\hbar$ は正定数とする．

$C^\infty(\tilde{S}_\hbar \times S^1)$ を $\tilde{S}_\hbar \times S^1$ 上の C^∞ 関数全体の空間とする．$\mathcal{A}$ を $C^\infty(\tilde{S}_\hbar \times S^1)$ を係数環とする ρ に関する形式的冪級数の全体とする．つまり，

$$\mathcal{A} = C^\infty(\tilde{S}_\hbar \times S^1)[[\rho]]$$

とする．ρ は形式的変数として扱われる．$i\partial_\theta, \rho\partial_\rho$ は $\mathcal{A}$ に微分として働く．

$i\partial_\theta$ 及び $\rho\partial_\rho$ は互いに可換なので，任意の $f, g \in \mathcal{A}$ に対して，$*$-積 $f * g$ を次で定義する：

$$f(\theta, \rho, \vartheta) * g(\theta, \rho, \vartheta) = f e^{\frac{\hbar}{2} \overleftarrow{i\partial_\theta} \wedge \overrightarrow{\rho\partial_\rho}} g. \tag{8.25}$$

ρ は形式的変数として扱い，全て ρ の形式冪級数に展開して考えるならば，上の積で結合代数が作られていることが分かる．

$\rho = e^\xi$ と置けば $\partial_\xi = \rho\partial_\rho$ だから，上の積は本質的にはモイヤル積である．

任意の自然数について $\rho_*^m = \rho^m$ であることに注意しておこう．まず $e^{i\theta}$, ρ, $e^{i\vartheta}$ の多項式 f について次の式が成立する：

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} * f(e^{i\theta}, \rho, e^{i\vartheta}) &= e^{i\theta} e^{\frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial_\theta} \overrightarrow{\rho\partial_\rho}} f(e^{i\theta}, \rho, e^{i\vartheta}) \\
&= e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\hbar}{2}\rho\partial_\rho\right)^k f(e^{i\theta}, \rho, e^{i\vartheta}) = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\hbar}{2}\partial_t\right)^k f(e^{i\theta}, e^t, e^{i\vartheta}) \\
&= e^{i\theta} f(e^{i\theta}, e^{t-\frac{\hbar}{2}}, e^{i\vartheta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta}, e^{-\frac{\hbar}{2}}\rho, e^{i\vartheta}).
\end{aligned}$$

多項式近似定理によりこれらの公式は任意の C^∞ 関数についても成立する．

補題 8.12 任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} * f(e^{i\theta},\ \rho,\ e^{i\vartheta}) &= e^{i\theta} f(e^{i\theta},\ e^{-\frac{\hbar}{2}}\rho,\ e^{i\vartheta}), \\
f(e^{i\theta}, \rho,\ e^{i\vartheta}) * e^{i\theta} &= e^{i\theta} f(e^{i\theta},\ e^{\frac{\hbar}{2}}\rho,\ e^{i\vartheta}).
\end{aligned}$$

補題 8.12 はパラメーター $\hbar$ を実正定数として成立するから，各 $\hbar$ 毎に代数 $(\mathcal{A}, *)$ を定義することを考えよう．補題 8.12 の場合と同様に

$$\begin{aligned}
(f(e^{i\theta+a}, e^{i\vartheta})\rho^k) * \rho^m &= f(e^{i\theta+a+\frac{m\hbar}{2}}, e^{i\vartheta})\rho^{k+m}, \\
\rho^m * (f(e^{i\theta+a}, e^{i\vartheta})\rho^k) &= f(e^{i\theta+a-\frac{m\hbar}{2}}, e^{i\vartheta})\rho^{k+m}
\end{aligned} \tag{8.26}$$

が得られる．次のことが容易に分かる：

命題 8.4 任意の $\hbar \in \mathbb{R}$ に対して (8.26)で定義される 2 項積 $*$ は $\mathcal{A}$ 上の $*$-積に拡張される．これを，$\mathcal{A}_\hbar$ と書いておく.

(8.26)を使った直接計算により $\mathcal{A}_\hbar$, $\hbar \in \mathbb{R}$ が $*$-積で閉じて結合代数になっていることが分かる.

そこで $q = e^{-\hbar}$ と置き，代数 $\mathcal{A}_\hbar$ の中で次のように置く：

$$\begin{aligned} &X = \sqrt{1-\rho^2}\cdot e^{i\theta}, \qquad Y = \sqrt{1-\rho^2}\cdot e^{-i\theta} \\ &U = ie^{\hbar/2}\rho\cdot e^{i\vartheta}, \qquad V = ie^{-\hbar/2}\rho e^{-i\vartheta}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

但し $\sqrt{1-\rho^2}$ は $\rho = 0$ の所でこれをテイラー展開して考える．このようにしないと意味をなさない.

共役構造は生成元のところで

$$X^\dagger = Y,\ Y^\dagger = X,\ U^\dagger = -e^\hbar V,\ V^\dagger = -e^{-\hbar}U$$

のように定義することで入れられる．これらの関係より,

$$\begin{aligned} X*Y &= 1 - e^\hbar\rho^2 = 1 + q^{-1}U*V, \\ Y*X &= 1 - e^{-\hbar}\rho^2 = 1 + qU*V, \\ X*U &= ie^{-\frac{1}{2}\hbar}e^{i\vartheta}\sqrt{1-\rho^2}e^{i\theta}*\rho = ie^{-\frac{1}{2}\hbar}e^{i\vartheta}\rho*\sqrt{1-\rho^2}e^{i\theta+\hbar} \\ &= q^{-1}U*X, \\ X*V &= ie^{\frac{1}{2}\hbar}e^{-i\vartheta}\sqrt{1-\rho^2}e^{i\theta}*\rho = q^{-1}V*X \end{aligned}$$

であることが分かり，同様にして

$$Y *_\hbar U = qU *_\hbar Y,\ Y *_\hbar V = qV *_\hbar Y,\ U *_\hbar V = V *_\hbar U$$

も分かる.

上の共役構造を込にして上に定義した関係は最初に述べた量子群の座標環 $A(SU_q(2))$ の生成元の関係式を与える.

$\mathcal{A}_\hbar^\infty$ を X, U, V, Y で生成された $\mathcal{A}$ の部分代数としよう．上に述べた関係式

より $\mathcal{A}_\hbar^\infty$ から $(\mathcal{A}, *_\hbar)$ の中への自然な準同型があるが，これが単射であることは容易に分かるであろう．

さらにもし $\hbar = 0$ とするならば

$$\begin{pmatrix} X, & U \\ V, & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2}e^{i\theta}, & i\rho e^{i\vartheta} \\ i\rho e^{-i\vartheta}, & \sqrt{1-\rho^2}e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

となることも分かる．

$SU(2)$ 上の任意の C^∞ 関数は ρ, $e^{i\theta}$ 及び $e^{i\vartheta}$ の組み合わせで書かれる．

従って $\rho = 0$ で定義される部分集合は対角行列全体(極大トーラス)に対応している．そして，代数 $(\mathcal{A}, *_0)$ は $f \in C^\infty(SU(2))$ の $\rho = 0$ におけるテイラー展開全体と理解される．

これより代数 $(\mathcal{A}, *_\hbar)$ は代数 $(\mathcal{A}, *_0)$ の変形量子化と理解される．

8.3.3 座標変換

前の二つの節で我々は同じ代数に対して二つの表示を得た．これがどのような所に対応しているかは $\hbar \to 0$ としてみると分った．そこで，ここではこの二つの間の「座標変換」を考えるが，これは単に生成元の間の関係式のことであって，決して点変換ではないから注意する必要がある．

まず $e_*^{-\frac{1}{2}z*\bar{z}}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元で，かつ $\hbar$ に関して実解析的であったことを思い出す．

座標変換を計算しよう．つまり前前節での X, Y, U, V と前節でのそれとが同じであるとして出発するのである．式(8.26)を式(8.24)と見比べてやると次のように置くのが自然であることが分かる：

$$\begin{aligned} \rho &= e_*^{-\frac{1}{2}z\bar{z}} = \frac{1}{\cosh\frac{\hbar t}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}} \\ e^{i\theta} &= \sqrt[*]{z*\bar{z}}^{-1} * z \quad \mathrm{mod}\ \varpi_0, \quad \vartheta = \vartheta \end{aligned} \tag{8.28}$$

$\sqrt[*]{z*\bar{z}}^{-1} * z$ は z のユニタリー部分のように見えるかもしれないが，7.2.2 節

で説明したように可逆ではないので，$\mathrm{mod}\, \varpi_0$ としなければならない[注3].

記号を簡単にするために

$$G_t(z\bar{z}) = \frac{1}{\cosh \frac{\hbar t}{2}} e^{-\frac{z\bar{z}}{\hbar} \tanh \frac{\hbar t}{2}}$$

と置く.

指数法則より任意の自然数 m に対して

$$G_1(z\bar{z})_*^m = e_*^{-\frac{m}{2} z\bar{z}} = G_m(z\bar{z})$$

である．しかし $G_1(z\bar{z})$ の定義を見れば $G_1(z\bar{z})_*^m \neq G_1(z\bar{z})^m$ であることが分かる.

このように等式が成立しないということはかなり困ったことのように見える．しかし，これは数学的な矛盾ではない．前節，前前節で使った可換代数は非可換代数の表示を一定にするために使っているいわば補助線にすぎない. *-積に関する準同型は必ずしも可換積の方の準同型まで引き起こすとは限らないからである.

ここでは $\rho^m = \rho_*^m$ と $G_m(z\bar{z})$ とを同一視しなければならないのであるが，このことを頭に入れて次のように定義しよう：

定義 8.1 任意に固定した $\hbar \geq 0$ において，$\mathbb{Z}_{\frac{\hbar}{2}} \times \mathbb{R}^2 \times S^1$ で定義された $\mathbb{C}$-値 C^∞ 関数 $f(m\hbar/2, x, y, e^{i\vartheta})$ が $SU_q(2)$ 上の $C_\hbar^\infty$ **関数**であるとは f が次のような漸近展開を持つことである：

$$f \sim a_0(m\hbar/2, e^{i\theta}) + a_{1,0}(m\hbar/2, e^{i\theta})G_1(z\bar{z})e^{i\vartheta} + a_{0,1}(m\hbar/2, e^{i\theta})G_1(z\bar{z})e^{-i\vartheta}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{k!l!} a_{k,l}(m\hbar/2, e^{i\theta}) G_{k+l}(z\bar{z}) e^{i(k-l)\vartheta}) + \cdots .$$

$C_\hbar^\infty(SU_q(2))$ を $SU_q(2)$ 上の $C_\hbar^\infty$ 関数の全体とする．命題 8.4 より次が分かる：

定理 8.5 任意の $\hbar \in \mathbb{R}_+$ に対して $C_\hbar^\infty(SU_q(2))$ は *-積で閉じている.

注3 そうすると，$\sqrt[*]{z\bar{z}}$ は絶対可逆となるから，すべてを $\sqrt[*]{z\bar{z}}^{-1}$ の冪に展開して考えなければならない.

$*$-積の世界では $C_\hbar^\infty(SU_q(2))$ の元が $SU_q(2)$ 上で滑らかな関数に見えるわけだが，面白いことに，どんな $C_\hbar^\infty(SU_q(2))$ の元も $SU(2)$ 上の普通の意味での C^∞ 関数と思うことは出来ないのである．これを見るには次の良く知られた議論を思い出す必要がある：

任意に固定した $\hbar \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^2 \times S^1$ 上定義された $\mathbb{C}$-値 C^∞ 関数 $f(x, y, e^{i\vartheta})$ が $SU(2)$ の C^∞ 関数に拡張される必要十分条件は f が次のような漸近展開を持つことである：

$$\begin{aligned} f \sim & a_0(e^{i\theta}) + a_{1,0}(e^{i\theta})G_1(z\bar{z})e^{i\vartheta} + a_{0,1}(e^{i\theta})G_1(z\bar{z})e^{-i\vartheta} + \cdots \\ & + \frac{1}{k!l!}a_{k,l}(e^{i\theta})G_1(z\bar{z})^{k+l}e^{i(k-l)\vartheta} + \cdots . \end{aligned}$$

$e^{-\lambda\zeta}$ は λ が正整数でなかったら $\sum c_n e^{-n\zeta}$, のような漸近展開を持つことは無いことに注意しよう．

空間 $C_\hbar^\infty(SU_q(2))$ は $C^\infty(SU(2))$ には含まれないわけであるし，パラメーター $\hbar$ に依存している．$C_\hbar^\infty(SU_q(2))$ は $*$-積では閉じているが，$C^\infty(SU(2))$ は閉じていない．一方 $C_\hbar^\infty(SU_q(2))$ は $\cdot$-積では閉じていない．

$*$-積の世界は可換積の世界からみるとかなりデフォルメされており「滑らか」と見えるものがかなり違っているのである．

第9章 モデルとしての非可換球面

前章までに非可換な代数の例をいくつか見て来たが，ちょうど一つの卵細胞から分裂を繰り返して様々に特化した機能を持った組織に成長するようにワイル代数から出発して様々に特化した代数に成長していく様を見てきた．しかし，当然のことではあるが，特化していくということは同時に対称性を失っていくということでもある．しかも，発散の困難が我々に教えることは，一つの見方が覇を唱えるなどということはあり得ないということである．我々は自然が,「ああも見えるし，こうも見える」という，人間の側にオプションの入った物の見方に慣れる必要があると思うのである．

リーマン球面

初めに，最も簡単な複素多様体を一つ与えておく．$\mathbb{C}$ とそのコピー $\mathbb{C}'$ を用意し，写像 ι: $\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}'-\{0\}$ を $\iota(z)=\frac{1}{z}$ で定義する．$\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}'$ を ι で張り合わせてできる球面と同相な複素多様体を**リーマン球面**(Riemann sphere)と呼び，$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ のように書く．$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ は1次元複素多様体であるが，コンパクトだから，この上全体で正則な関数は定数以外存在せず，特異点を持った関数以外考えられない．

$\mathbb{C}^2$ の中の原点を通る複素直線を表すにはその直線の傾き(直線上の点を (ζ_1,ζ_2) としたとき，ζ_1 と ζ_2 の比 ζ_1/ζ_2)を $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の点として表示すれば，$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ は，複素1次元射影空間($\mathbb{C}^2$ の中の原点を通る複素直線全体)と同

じであることが分かる．

9.1 積分公式による多変数ワイル代数の拡張

ここでは変数を全て実数に制限して考える．これは気楽に行うことではなく，かなり精密に見なければならないことである．この節では特に断らない限り $\hbar$ は正の実数を動くパラメーターであるとする．

9.1.1 表象族 $\Sigma^0(\mathbb{R}^4)$ 上の $*$-積

$\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$ と見なして，$*$-積を積分で書くことを考え，それをもとに拡張する．その為には6章の振動積分による定義を(変数を増やして)使う．

$\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{R}^4$ とを同一視して変域を実数にしてしまうと，$*$-積は $\Sigma^\infty(\mathbb{C}^2)$ に次の振動積分公式((6.9)式参照):

$$f*g=os\text{-}\iint f(x+X,y+\hbar Y)g(x+X',y+\hbar Y')e^{2i(XY'-YX')}\,đX\,đY\,đX'\,đY'$$

で拡張されており，結合律を満たす位相代数になっている．ただし $x=(x_1,x_2)$, $XY'-YX'=\sum(X_iY_i'-Y_iX_i')$, $dX=dX_1dX_2$ である．上の公式はモイヤル積公式に対応している．線型空間

$$\Sigma^\infty(\mathbb{C}^2)=\bigcup_m\Sigma^m(\mathbb{C}^2)$$

は $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ の中のかなり小さい部分空間であるが，次のことが分かる：

$$\Sigma^k(\mathbb{C}^2)*\Sigma^l(\mathbb{C}^2)\subset\Sigma^{k+l}(\mathbb{C}^2),$$
$$[\Sigma^k(\mathbb{C}^2),\Sigma^l(\mathbb{C}^2)]\subset\Sigma^{k+l-2}(\mathbb{C}^2).$$

これより $\Sigma^0(\mathbb{C}^2)$ は $*$-積で閉じており，$\Sigma^2(\mathbb{C}^2)$ は交換子に関してリー代数をなしていることも分かる．

$\mathbb{R}^4$ で普通にワイル代数を考え，$\zeta_1=u_1+iv_1$, $\zeta_2=u_2+iv_2$ とする．自然な包合的反自己同型 $a\to\bar{a}$ も考えておく．次のことは容易であろう：

$$\bar{\zeta}_1*\zeta_1+\zeta_2*\bar{\zeta}_2=\bar{\zeta}_1\cdot\zeta_1+\zeta_2\cdot\bar{\zeta}_2.$$

ただし，$\cdot$ は普通の積を表す．右辺を ρ と書くことにする．

$\sqrt[*]{\rho}$ とか $\sqrt[*]{\rho}^{-1}$ の存在は自明ではないから $*$-指数関数 $e_*^{-t\frac{1}{2}\rho}$ の定義と計算から始めなければならない：

$F_t(s)$ を一変数の関数とし $F_t(\rho)=e_*^{-t\frac{1}{2}\rho}$ と置き次の微分方程式を考える：

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(\rho)=-\frac{1}{2}\rho*F_t(\rho)=-\frac{1}{2}\rho\cdot F_t(\rho)+\hbar^2F_t'(\rho)+\hbar^2\frac{1}{2}\rho\cdot F_t''(\rho)$$

だから F_t に関する微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(s)=-\frac{1}{2}sF_t(s)+\hbar^2(F_t'(s)+\frac{1}{2}sF_t''(s))$$

を初期条件 $F_0(s)=1$ で解いて次が得られる (3.1 節参照):

補題 9.1 $*$-指数関数 $e_*^{-\frac{t}{2}\rho}$ はワイル順序表示で

$$e_*^{-\frac{t}{2}\rho}=\frac{4e^{\hbar t}}{(e^{\hbar t}+1)^2}\exp\{-\frac{\rho}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}\}$$

である．特に $t>0$ のとき，$e_*^{-\frac{t}{2}\rho}\in\Sigma^{-\infty}(\mathbb{C}^2)$ であり，さらに

$$\lim_{t\to\infty}e_*^{-\frac{t}{2}\rho}=0,\quad \text{しかし}\quad \lim_{t\to\infty}e_*^{-\frac{t}{2}(\zeta_1*\bar{\zeta}_1+\zeta_2*\bar{\zeta}_2)}=\lim_{t\to\infty}e_*^{-\frac{t}{2}\rho}e^{\hbar t}=4e^{-\frac{\rho}{\hbar}}$$

が成立する．$4e^{-\frac{\rho}{\hbar}}$ は真空に対応している．

$\tilde{\varpi}=4e^{-\frac{\rho}{\hbar}}$ と置けば，次の事も分かる：

$$\bar{\zeta}_i*\tilde{\varpi}=0=\tilde{\varpi}*\zeta_i,\quad i=1,2\qquad \rho*\tilde{\varpi}=2\hbar\tilde{\varpi}.$$

次のことは容易であろう：

系 9.1 $\mathrm{Re}\,z>-2\hbar$ の時，$z+\rho$ は可逆[注1]．特に ρ は可逆．

ρ の逆元を ρ_*^{-1} と表そう．ラプラス変換の公式を使って，

$$\sqrt[*]{\rho_*^{-1}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{t}^{-1}e_*^{-t\rho}dt$$

と定義し，$r_*^{-1}=\sqrt[*]{\rho_*^{-1}}$ と表せば，$(r_*^{-1})^2=\rho_*^{-1}$, $r_*^{-1}\in\Sigma^1(\mathbb{C}^2)$ が分かり，

[注1] 実際は逆元は二つあるので，これは，局面を選んでしまっていることになる．さらにこの局面では $z\notin-2\hbar\{1,2,3,\ldots\}$ のとき可逆になることが 4 章の解析接続と同じやりかたで示せる．

これより，r_* を $r_* = r_*^{-1} * \rho$ で定義する．

注意　$*$-積に関する逆元 r_*^{-1} は可換積に関する逆元 $\frac{1}{r.}$ とは違う．$\frac{1}{r.} \cdot r = 1$, $r * r_*^{-1} = r_*^{-1} * r = 1$ ではあるが，$r * \frac{1}{r.} \neq 1$ である．これらを r^{-1} と $\frac{1}{r}$ とで書き分け，$*$-印は取ることにする．

$*$-積の世界では点の概念が無いので，古典力学の簡約のときのように等エネルギー面をハミルトン関数 H を使って $H = c$ のように定義するわけにはいかない．等エネルギー面に相当するものを定義するのが難しいのだが，これを考えるために，生成元上で，次のように置く：

$$R(e^t)\zeta_i = e^t\zeta_i,\ R(e^t)\bar{\zeta}_i = e^t\bar{\zeta}_i,\ R(e^t)\hbar = e^{2t}\hbar. \tag{9.1}$$

ただしこの場合 $\hbar$ は数と思うのではなく，$\mathbb{R}_+$ を動く変数と見ておく．したがって，正確には $\Sigma^\infty(\mathbb{C}^2)$ を考えるのではなく，パラメーター $\hbar$ も変数として扱った $\Sigma^\infty(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}_+)$ を考えて，そこで話をしなければならない．

この置き方は

$$R(e^t)([\zeta_i, \bar{\zeta}_j]) = [R(e^t)\zeta_i, R(e^t)\zeta_j]$$

となっていて，基本関係式と矛盾しないようになっているから，これで1径数の自己同型変換群が定義される：

$$R(e^t) : C^\infty(\mathbb{C}_*^2) \to C^\infty(\mathbb{C}_*^2).$$

そこで簡約の最初の手順として $\Sigma^\infty(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}_+)$ の閉部分代数 $\mathcal{C}$ として $R(e^t)$ で不変な関数環を考える：

$$\mathcal{C} = \{f \in \Sigma^\infty(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}_+); R(e^t)f = f\}.$$

$\mathcal{C}$ は完備な位相結合代数となる．$\mathcal{C}$ の生成元としては次のような元が選べる：

$$\mu = -2\hbar r^{-2},\quad \xi_1 = r^{-1} * \zeta_1,\quad \xi_2 = r^{-1} * \zeta_2,$$
$$\bar{\xi}_1 = \bar{\zeta}_1 * r^{-1},\quad \bar{\xi}_2 = \bar{\zeta}_2 * r^{-1}.$$

次のことは容易に分かる：

補題 9.2 任意の自然数 l に対して次が成立する：

$$\mathcal{C} \cap \hbar^l * \Sigma^\infty(\mathbb{C}^2) = \mu^l * \mathcal{C}.$$

補題 9.2 を使って次のことが分かる：

定理 9.1 $B = \mathcal{C} \cap \Sigma^0(\mathbb{C}^2)$ と置くと

(A.1) 元 $\mu \in \mathcal{C}$ があって，$[\mu, \mathcal{C}] \subset \mu * \mathcal{C} * \mu$ を満たす．

(A.2) $[\mathcal{C}, \mathcal{C}] \subset \mu * \mathcal{C}$.

(A.3) 閉部分空間 B があり，$\mathcal{C} = B \oplus \mu * \mathcal{C}$ (位相直和) となっている．

(A.4) $a \to \mu * a$, $a \to a * \mu$ で定義される左右の積作用素 $\mu* : \mathcal{C} \to \mu * \mathcal{C}$, $*\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{C} * \mu$ は線型同型 (自己相似) を与える．

(A.5) $a \to \bar{a}$ は対合的反自己同型である．

B は今の場合は $C^\infty(S^3)$ である．

上に掲げた(A.1～5)は **μ-制御代数**と呼ぶものの公準である．これはかなり色々な所に出て来る構造であり，我々はこれを量子論的数学の概念的枠組と見ている．これについては [18] で詳しく述べた．

9.2　非可換リーマン球とベレーズィン表現

話をもとに戻そう．非可換球面なるものを考えたいのだが，モデルとなるべきものがないのだから，ここでは簡約と呼ばれる操作で非可換球面を構成してみよう．

9.2.1　非可換リーマン球の簡約による構成

前と同じく ρ を次で定義する：

$$\rho = \bar{\zeta}_1 * \zeta_1 + \zeta_2 * \bar{\zeta}_2 = \zeta_1 * \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 * \zeta_2 = \bar{\zeta}_1 \cdot \zeta_1 + \zeta_2 \cdot \bar{\zeta}_2. \tag{9.2}$$

$R(e^t)$ は $\Sigma^\infty(\mathbb{C}^2\times\mathbb{R}_+)$ から自分自身への位相線型同型を引き起こし，$*$-積に関して自己同型の 1 径数部分群となっていた．$\mathcal{C}$ を $R(e^t)$-不変な元全体のなす閉集合とする．$\mathcal{C}$ は

$$\mu=-2\hbar r^{-2},\ \xi_1=r^{-1}*\zeta_1,\quad \xi_2=r^{-1}*\zeta_2,\ \bar\xi_1=\bar\zeta_1*r^{-1},\ \bar\xi_2=\bar\zeta_2*r^{-1}$$

より生成される代数の閉包である．

代数 $\mathcal{C}$ を S^3 上の**非可換接触代数**と呼ぶ．$\mathcal{C}$ はすぐには接触ワイル代数とつながっているようには見えないのに，こういう名前を付けた理由については次の節にまわす．

真空 $\tilde\varpi$ として複素真空 ϖ_0 を参考にして $\tilde\varpi=4e^{-\frac{1}{\hbar}(\zeta_1\bar\zeta_1+\zeta_2\bar\zeta_2)}$ を取ると，

$$\bar\xi_i*\tilde\varpi=0,\ (i=1,2)\ \ \mu^{-1}*\tilde\varpi=-\tilde\varpi \tag{9.3}$$

となるから，多項式 $p(\mu,\xi,\bar\xi)$ に対して $p(\mu,\xi,\bar\xi)*\tilde\varpi$ を考えると μ や $\bar\xi$ は消えて ξ の多項式になる．このことから $Hol(\mathbb{C}^2)$ を ξ_1,ξ_2 の整関数の全体として，$Hol(\mathbb{C}^2)*\tilde\varpi$ を $\mathcal{C}$ の正規表現(真空表現)の表現空間と考えることができる．

$\mu,\xi_i,\bar\xi_i$ は次のような関係式をみたす：

$$\begin{aligned}
&\bar\xi_1*\xi_1+\bar\xi_2*\xi_2=1, && \xi_1*\bar\xi_1+\xi_2*\bar\xi_2=1+\mu\\
&[\mu^{-1},\xi_i]=-\xi_i, && [\mu^{-1},\bar\xi_i]=\bar\xi_i,\\
&[\xi_1,\xi_2]=[\bar\xi_1,\bar\xi_2]=0, && [\xi_i,\bar\xi_j]=\mu*(\delta_{ij}-\bar\xi_j*\xi_i),\quad i,j=1,2.
\end{aligned}\tag{9.4}$$

最初の行の等式は古典的レベルでの束縛を与えている．最後の等式は

$$\xi_i*\bar\xi_j-(1-\mu)\bar\xi_j*\xi_i=\mu\delta_{ij} \tag{9.5}$$

とも書ける．二行目の式は $\xi_i,\bar\xi_i$ の任意の多項式は $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ の固有ベクトルであるとも言っている．すると，表現空間 $Hol(\mathbb{C}^2)*\tilde\varpi$ は $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ の固有空間に分解して

$$\sum\oplus\Gamma(L^m),\quad \Gamma(L^m)=Span\{\xi_1^k*\xi_2^l;k+l=m\}$$

と考えられる．しかし，$\xi_1^k*\xi_2^l$ は計算しにくいので，次の式を利用して $\zeta_1^k*\zeta_2^l$ の式に書き換えておくとよい：

$$\frac{\sqrt{-\mu}^m}{\sqrt{2\hbar}^m}\quad \zeta_1^k*\zeta_2^l=\prod_{j=0}^{m-1}\sqrt{1+j\mu}\ \xi_1^k*\xi_2^l,\quad k+l=m.$$

$\Gamma(L^m)*\tilde{\varpi}$ 上では μ^{-1} は $m+1$ として扱って良いから，$\Gamma(L^m)*\tilde{\varpi}$ 上では $k+l=m$ として

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}^m}\zeta_1^k*\zeta_2^l=\sqrt{(m+1)!}\,\xi_1^k*\xi_2^l \tag{9.6}$$

である．

ここで，簡約の手続きにしたがって μ と可換な元の全体を考えて，

$$\tilde{\mathcal{V}}=\{f\in\mathcal{C};[\mu,f]=0\}$$

と置く．(9.4)より $[\mu^{-1},\xi_i]=-\xi_i$，　$[\mu^{-1},\bar{\xi}_i]=\bar{\xi}_i$ だから，$\tilde{\mathcal{V}}$ は

$$\mu,\ \bar{\xi}_1*\xi_1,\ \bar{\xi}_1*\xi_2,\ \bar{\xi}_2*\xi_1,\ \xi_1^k*\xi_2^l*\tilde{\varpi}*\bar{\xi}_1^m*\bar{\xi}_2^n;\ (k+l=m+n)$$

で位相こみで生成されている[注2]事が分かる．あとで詳しく書くが，$\tilde{\mathcal{V}}$ の元は上の各固有空間 $\Gamma(L^m)$ への有限次元表現を持っているのである．

$i=1,2$ に対して，

$$e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i\bar{\zeta}_i}=\frac{2e^{\hbar t/2}}{e^{\hbar t}+1}\exp\{-\frac{\zeta_i\bar{\zeta}_i}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}\} \tag{9.7}$$

であり，次の式が成立していることに注意しよう：

$$e_*^{-\frac{t}{2}\bar{\zeta}_i*\zeta_i}=e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i\bar{\zeta}_i}e^{-\frac{t}{2}\hbar}.$$

実はこの元は $\Sigma^0(\mathbb{C}^2)$ の元ではなく，$\Sigma^0(\mathbb{C})$ の元でしかないから，これを含むような関数空間($\Sigma^0(\mathbb{C}^2)$ と $\Sigma^0(\mathbb{C})$ とで生成される代数)を用意してから話をすべきかもしれないが，ここではあまりそのことに注意を払わないことにする．

これより，

$$\lim_{t\to\infty}e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i*\bar{\zeta}_i}=\lim_{t\to\infty}e_*^{-\frac{t}{2}\zeta_i\bar{\zeta}_i}e^{\frac{t}{2}\hbar}=2e^{-\frac{\zeta_i\bar{\zeta}_i}{\hbar}}$$

も分かる．そこで，$\varpi_i=2e^{-\frac{\zeta_i\bar{\zeta}_i}{\hbar}}$ のように置く．ϖ_i は $\zeta_i=0$ の所の複素真

注2 代数的に生成し閉包を取ることをこのように言う．

空であるが，0 の有界近傍に対応していると思う方がこの場合は都合がよい．

$\zeta_i\bar{\zeta}_i$, $\bar{\zeta}_i{*}\zeta_i$ は可逆であり

$$(\bar{\zeta}_i * \zeta_i)_+^{-1} = \int_0^\infty e_*^{-t\bar{\zeta}_i*\zeta_i}\,dt$$

であるが，$\zeta_i * \bar{\zeta}_i$ は可逆でない注3．これをもとに，ζ_i は左逆元 $(\bar{\zeta}_i * \zeta_i)_+^{-1} * \bar{\zeta}_i$ を持つことが分かる．

$$\zeta_i * ((\bar{\zeta}_i * \zeta_i)_+^{-1} * \bar{\zeta}_i) = 1 - \varpi_i$$

である．次のような関係式が成立する：

$$\begin{aligned}
&\varpi_1 * \varpi_2 = \varpi_2 * \varpi_1 = \tilde{\varpi}, \quad \varpi_i * \varpi_i = \varpi_i,\\
&\bar{\zeta}_i * \varpi_i = 0 = \varpi_i * \zeta_i, \quad \zeta_i * \varpi_j = \varpi_j * \zeta_i \quad (i \neq j) \\
&\varpi_i * \mu = \mu * \varpi_i, \quad \varpi_i * r = r * \varpi_i.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

ラプラス変換の公式を使って，

$$\sqrt[*]{\bar{\zeta}_i*\zeta_i}^{\,-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\, e_*^{-t\bar{\zeta}_i*\zeta_i}\,dt$$

と定義する．

$\zeta_i * \sqrt[*]{\bar{\zeta}_i * \zeta_i}^{\,-1} \in \Sigma^\infty(\mathbb{R}^2)$ ではあるが，これは ζ_i のユニタリー部分ではない．

z, $w \in \tilde{\mathcal{V}}$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}
z &= \xi_2 * \{(\bar{\xi}_1 * \xi_1)^{-1} * \bar{\xi}_1\} = \zeta_2 * \{(\bar{\zeta}_1 * \zeta_1)^{-1} * \bar{\zeta}_1\},\\
w &= \xi_1 * \{(\bar{\xi}_2 * \xi_2)^{-1} * \bar{\xi}_2\} = \zeta_1 * \{(\bar{\zeta}_2 * \zeta_2)^{-1} * \bar{\zeta}_2\}.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

$(\bar{\xi}_i * \xi_i)^{-1} * \bar{\xi}_i$ は ξ_i の逆元ではないが，z, w はリーマン球の複素座標 $z = \xi_2 * \xi_1^{-1}$, $w = \xi_1 * \xi_2^{-1}$ の役目をはたす．

z, w は変数の制限(局所化)を行わずに定義されていることに注目してもらいたい注4．さらに，

注3 これは逆元の定義を上の積分で行っているからで，その意味では $\zeta_i * \bar{\zeta}_i$ は可逆でないような局面を選んでいると言った方が正確である．

注4 後節で変数の制限(局所化)を行った場合も調べてある．逆元を添加する局所化は注意して行わないと危険である．

$$z * w = 1 - \varpi_2 \in \tilde{\mathcal{V}}, \quad w * z = 1 - \varpi_1 \in \tilde{\mathcal{V}} \tag{9.10}$$

も容易に得られる．これは $z = 0$, $w = 0$ の部分を除けば互いに逆元の関係になっていると言える．

前の非可換極座標の節で真空は原点の有界近傍に対応していると述べたのだが，これを見る限り，ϖ_1 と ϖ_2 が独立に $z = 0$ とか $w = 0$ の有界近傍に対応しているというわけではなく，$\varpi_1 = \varpi_2 = 0$ と考えると z, w が可逆になると言っているように思える．

次のような式が成立していることにも注意しよう：

$$z * \varpi_1 = \varpi_2 * z = 0, \quad w * \varpi_2 = \varpi_1 * w = 0, \quad \tilde{\varpi} = \varpi_1 * \varpi_2 = \varpi_2 * \varpi_1. \tag{9.11}$$

補題 9.3 $1 + z * \bar{z}$, $1 + \bar{z} * z$ は可逆で

$$(1 + z * \bar{z})^{-1} = \xi_1 * \bar{\xi_1} - \mu$$
$$(1 + \bar{z} * z)^{-1} = \xi_1 * \bar{\xi_1} + \varpi_1$$

証明 (9.9)の右側の式を使うと $1 + z * \bar{z} = r^2 * (\bar{\zeta_1} * \zeta_1)^{-1} = (\bar{\zeta_1} * \zeta_1)^{-1} * r^2$ だから，$(1 + z * \bar{z})^{-1}$ は存在し，$\bar{\zeta_1} * \zeta_1 * r^{-2}$ だが

$$\xi_1 * \bar{\xi_1} = r^{-1} * \zeta_1 * \bar{\zeta_1} * r^{-1} = \zeta_1 * \bar{\zeta_1} * r^{-2} = \bar{\zeta_1} * \zeta_1 * r^{-2} + \mu.$$

逆元は

$$(1 + z * \bar{z})^{-1} = \bar{\zeta_1} * \zeta_1 * r^{-2} = \xi_1 * \bar{\xi_1} - \mu$$

で与えられることが分かる．

第二の等式は次のように計算する．球擣き補題を使うと $1 - \bar{z} * (1 + z * \bar{z})^{-1} * z$ が $1 + \bar{z} * z$ の逆元であることも分かる．最初の式と，(9.4)を使ってこれを計算すると，

$$(1 + \bar{z} * z)^{-1} = 1 - (1 - \mu) * \bar{z} * \bar{\xi_1} * \xi_1 * z$$

であり，これの $\xi_1 * z$ の所に

$$\xi_1 * z = \xi_1 * \xi_2 * (\bar{\xi_1} * \xi_1)^{-1} * \bar{\xi_1} = \xi_2 * (1 - \varpi_1)$$

を使えば，$1 - (1 - \mu) * (1 - \varpi_1) * \bar{\xi_2} * \xi_2 * (1 - \varpi_1)$ となり，

$$\begin{aligned}(1 + \bar{z} * z)^{-1} &= 1 - (1 - \mu) * (1 - \varpi_1) * (1 - \bar{\xi_1} * \xi_1) * (1 - \varpi_1) \\ &= 1 - (1 - \mu) * (1 - \varpi_1) + (1 - \mu) * (1 - \varpi_1) * \bar{\xi_1} * \xi_1 * (1 - \varpi_1).\end{aligned}$$

μ, ϖ_1 の定義より $[\mu, \varpi_1]=0$ が分かるから，(9.5)を使って

$$(1+\bar{z}*z)^{-1}=\mu+\varpi_1-\mu*\varpi_1+(1-\varpi_1)*(\xi_1*\bar{\xi}_1-\mu)*(1-\varpi_1)$$

となる．これに $\bar{\xi}_1*\varpi_1=0$, 及び

$$\varpi_1*\xi_1=\varpi_1*r_*^{-1}*\zeta_1=\varpi_1*\zeta_1*\sqrt{\rho+2\hbar}^{-1}=0$$

を使うと $(1+\bar{z}*z)^{-1}$ は

$$\mu+\varpi_1-\mu*\varpi_1+\xi_1*\bar{\xi}_1-\mu*(1-\varpi_1)=\xi_1*\bar{\xi}_1+\varpi_1$$

となる．　□

補題9.3より $(1+\bar{z}*z)^{-1}-(1+z*\bar{z})^{-1}=\mu+\varpi_1$ であり，これより

$$(1+\bar{z}*z)^{-1}*[z,\bar{z}]*(1+z*\bar{z})^{-1}=\mu+\varpi_1.$$

さらに，

$$(1+\bar{z}*z)*\varpi_1=\varpi_1=\varpi_1*(1+\bar{z}*z),$$
$$\varpi_1*(1+z*\bar{z})^{-1}=\varpi_1*(\xi_1*\bar{\xi}_1-\mu)=-\mu*\varpi_1$$

を使って

$$\begin{aligned}[z,\bar{z}]&=\mu*(1+z*\bar{z})*(1+\bar{z}*z)-\mu^{-1}*\varpi_1,\\ [w,\bar{w}]&=\mu*(1+w*\bar{w})*(1+\bar{w}*w)-\mu^{-1}*\varpi_2.\end{aligned}\tag{9.12}$$

この $\mu^{-1}*\varpi_i$ の項は奇妙に見えるかもしれないが，これは，ζ_i^{-1} の代りに半逆元を使っているためである．しかし，この項があるために，真空表現がベレーズィンの作用素になり，これが無いと有限次元の表現は現れないものと思われる．

また

$$\xi_2=z*\xi_1,\quad \xi_1=w*\xi_2,\quad \varpi_1*\xi_1=0,\quad \varpi_2*\xi_2=0 \tag{9.13}$$

も成立する．次の関係式は容易であろう：

$$\begin{aligned}&[z*\bar{z},\bar{z}*z]=0, && [w*\bar{w},\bar{w}*w]=0,\\ &[z,\xi_1]*(1-\varpi_1)=0, && [w,\xi_2]*(1-\varpi_2)=0,\\ &[z,\xi_2]=0, && [w,\xi_1]=0.\end{aligned}\tag{9.14}$$

関係式が複雑になってきたが，(9.10), (9.11), (9.12), (9.14)を見ると，μ, z, $\bar{z}$, w, $\bar{w}$, ϖ_1, ϖ_2 は $*$-積に関して閉じており，ひとつの代数 $\tilde{\mathcal{V}}$ を形成していることが分かる．$\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2$ はこの代数の外側にある元で，これを加えて，代数 $\mathcal{C}$ が作られているが，補題 9.3, (9.13),(9.14)で $\tilde{\mathcal{V}}$ と関係づけられているのである．

$z * \varpi_1 = 0$ であったから，z^{-1} がある所で話をするときには極座標の所で述べたように mod ϖ_1 で考えないといけないから，(9.12)のような関係をもった代数で z から w に座標変換しようとすれば，代数に z^{-1} を添加しなければならないのであるが，こうしたときの関係式は

$$[z, \bar{z}] = \mu * (1 + z{*}\bar{z}) * (1 + \bar{z}{*}z) \quad \mathrm{mod}\ \varpi_1$$

へ変る．

このことは w についても同様で，mod ϖ_2 で考えて，$z * w = w * z = 1$ が成立している．それぞれ ϖ_1, ϖ_2 で生成される両側イデアルで商代数を作ったとき z を w に変換する対応 $z \to w$ は同型写像となる．

一方，補題 9.3 と球撞き補題を使うと，

$$[z, \bar{z}{*}(1 + z{*}\bar{z})^{-1}] = \mu + \varpi_1$$

となる．これは $\bar{z}{*}(1 + z{*}\bar{z})^{-1}$ が z の量子正準共役に近いことを意味してはいるが，ϖ_1 の項があるために完全な量子正準共役ではなく，何がしか近似的な意味での量子正準共役しか意味しない．では，z の量子正準共役変数は存在するのだろうか？ これは，$[z, f(z, \bar{z})] = \mu$ となる f を見つける問題だが，答えは否である．というのはもし，$[z, X] = \mu$ となる $X \in \tilde{\mathcal{V}}$ があったとすると，z, X は $\tilde{\mathcal{V}}$ の中でワイル代数を生成するが，μ が可逆なのでこの代数は単純環となり，有限次元表現など持ちようがないのだが，次節で示すように $\tilde{\mathcal{V}}$ の真空表現は有限次元表現の直和に分解されているからである．このようなことは一般的に起こることだと思われるので，正準量子化等を考えるときに注意しておかなくてはならない．

9.2.2 行列表現

$\bar{\xi}_1 * \tilde{\varpi} = \bar{\xi}_2 * \tilde{\varpi} = 0$ だからこのことを利用して色々なものを $\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}$ の空間に

$$\hat{A} : \xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi} \to A * \xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}$$

のようにして行列表現する．これを $\tilde{\mathcal{V}}$ の正則表現とか**真空表現**と呼ぶ．行列表現されたものには ∧ をつけて表すことにする．

まず，定義と(9.14)より，

$$\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi} = z^l * \xi_1^{k+l} * \tilde{\varpi} = w^k * \xi_2^{k+l} * \tilde{\varpi}$$

が分かり，(9.11)を使うと $k > \ell$ のときには

$$z^k * \xi_1^\ell * \tilde{\varpi} = 0 = w^k * \xi_2^\ell * \tilde{\varpi}$$

となることに注意する．

さらに，(9.3)より $\mu * \varpi = -\varpi$ であることに注意し，公式(9.4)を使う直接計算で，まず

$$\hat{\mu}\,(\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}) = -\frac{1}{m+1}\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}$$

が分かっていた．

つぎに (9.14)等を計算で，代数 $\tilde{\mathcal{V}}$ の生成元達が次のような行列に表現されることが分かる．$k + l = m$ として，

$$\hat{z}(\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}) = \xi_1^{k-1} * \xi_2^{l+1} * \tilde{\varpi}, \quad \xi_1^{-1} = \xi_2^{m+1} = 0$$
$$\hat{w}(\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}) = \xi_1^{k+1} * \xi_2^{l-1} * \tilde{\varpi}, \quad \xi_2^{-1} = \xi_1^{m+1} = 0$$
$$\hat{\varpi}_1(\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}) = \delta_{k,0}\xi_2^m * \tilde{\varpi}$$
$$\hat{\varpi}_2(\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}) = \delta_{0,l}\xi_1^m * \tilde{\varpi}$$
$$\hat{\varpi}(\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}) = \delta_{k,0}\delta_{0,l} * \tilde{\varpi}.$$

見て分かるように，この表現は固有空間 $\Gamma(L^m)$ への表現であり，$\hat{\varpi}$ は空間 $\Gamma(L^0) = \mathbb{C}\tilde{\varpi}$ 以外の固有空間には 0 として作用する．ϖ_i の存在が固有空間を有限次元に切り取る働きをしていることがわかる．さらに，$\Gamma(L^m)$ 上では $\hat{\mu}^{-1} = -(m+1)$ なので，(9.6)より

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}^m}\zeta_1^k * \zeta_2^l = (m+1)!\xi_1^k * \xi_2^l = (m+1)!z^l * \xi_1^m$$

でもあった.

後で説明するベレーズィン表現との関係を見るには $\xi_1^k * \xi_2^l * \tilde{\varpi}$ の空間を $z^l * \xi_1^{k+l} * \tilde{\varpi}$ の空間と，$w^k * \xi_2^{k+l} * \tilde{\varpi}$ の空間とが(9.13)を貼合わせの写像として貼合わせられているもののように考えることが大切である[注5].

ベレーズィン表現との関係を見るには $\tilde{\mathcal{V}}$ の生成元として $\{\xi_1 * \bar{\xi}_1, \xi_1 * \bar{\xi}_2, \xi_2 * \bar{\xi}_1\}$ を使うよりは $\{\bar{\xi}_1 * \xi_1,\ \bar{\xi}_2 * \xi_1,\ \bar{\xi}_1 * \xi_2\}$ を使う方が便利なので，これで考えるが，これらは ζ_i の方で書き直すと，$\bar{\mu} = \mu$ 等を使って

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_1*\xi_1 &= -\frac{\mu}{2\hbar}*(1-\mu)^{-1}*\bar{\zeta}_1*\zeta_1, \quad \bar{\xi}_2*\xi_1 = -\frac{\mu}{2\hbar}*(1-\mu)^{-1}*\bar{\zeta}_2*\zeta_1,\\ \bar{\xi}_2*\xi_2 &= -\frac{\mu}{2\hbar}*(1-\mu)^{-1}*\bar{\zeta}_2*\zeta_2, \quad \bar{\xi}_1*\xi_2 = -\frac{\mu}{2\hbar}*(1-\mu)^{-1}*\bar{\zeta}_1*\zeta_2\end{aligned} \tag{9.15}$$

が分かる. (9.15)と $[\zeta_i, \bar{\zeta}_j] = -2\hbar\delta_{ij}$ から次のような真空表現が得られる：

$$\begin{aligned}(\bar{\xi}_1 * \xi_1)\hat{}: z^l * \xi_1^m * \tilde{\varpi} &\to \tfrac{m+1-l}{m+2}\ z^l * \xi_1^m * \tilde{\varpi},\\ (\bar{\xi}_2 * \xi_1)\hat{}: z^l * \xi_1^m * \tilde{\varpi} &\to \tfrac{l}{m+2}\ z^{l-1} * \xi_1^m * \tilde{\varpi},\\ (\bar{\xi}_1 * \xi_2)\hat{}: z^l * \xi_1^m * \tilde{\varpi} &\to \tfrac{k}{m+2}\ z^{l+1} * \xi_1^m * \tilde{\varpi}.\end{aligned}$$

ただし，$z^{-1} * \tilde{\varpi} = z^{m+1} * \tilde{\varpi} = 0$ である.

これが次節のベレーズィン表現に一致するのである.

ベレーズィン表現

ベレーズィン表現と呼ばれるものを定義しよう. まず次の積分作用素を定義する：

補題 9.4 z 及び v を $\mathbb{C}$ 上の複素座標関数とすると，任意の非負整数で，次の写像

$$I_m(p)(z) = \frac{m+1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} p(v)\frac{(1+z\bar{v})^m}{(1+v\bar{v})^m}\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}\left(\frac{1}{2i}dv d\bar{v}\right) \tag{9.16}$$

は多項式の全体の空間 $\mathcal{P}$ から，次数が m までの多項式の全体の空間 $\mathcal{P}_m$ へ

注5 しかし，$z * w = 1 - \varpi_2$, $w * z = 1 - \varpi_1$ であるから，言葉どうりの貼合わせではなく，$\mathrm{mod}\varpi_i$ での貼合わせと思わないといけない.

の射影作用素である．ただし，$\frac{1}{2i}dvd\bar{v}$ は $\mathbb{C}$ 上の面積要素である．

これは積分を極座標で書いてみれば $k \neq 0$ である限り，$\int_{S^1} e^{ik\theta}d\theta = 0$ であることより容易に分かる．

$\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}dvd\bar{v}$ は S^2 上の面積要素だから，(9.16)の右辺は S^2 上の積分と見なせる．補題 9.4 を使って，射影作用素 P_m を

$$(P_m f)(z) = \frac{m+1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(v,\bar{v})\frac{(1+z\bar{v})^m}{(1+v\bar{v})^m}\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}(\frac{1}{2i}dvd\bar{v})$$

のように定義し，任意の $a \in C^\infty(S^2)$ に対して，$B(a)f$ を，$f = \sum_m f_m * \xi_1^m$，$f_m \in \mathcal{P}_m$ に対して

$$B(a)f = \sum\nolimits_{m\geq 0} P_m(a\cdot f_m) * \xi_1^m$$

と定義すると，$B(a)$ は $\sum\oplus\mathcal{P}_m * \xi_1^m * \varpi$ から自分自身への線型作用素を定義する．これは

$$B(a)f = \sum_{m\geq 0}\left\{\frac{m+1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} a(v,\bar{v})f_m(v)\frac{(1+z\bar{v})^m}{(1+v\bar{v})^m}\frac{1}{(1+v\bar{v})^2}(\frac{1}{2i}dvd\bar{v})\right\}*\xi_1^m$$

とも書かれる．

直接計算してみれば次が分かるが，これは演習問題としよう：

$$(\bar{\xi}_1 * \xi_1)\check{} = B(\frac{1}{1+\bar{z}z}), \quad (\bar{\xi}_2 * \xi_1)\check{} = B(\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}z}), \quad (\bar{\xi}_1 * \xi_2)\check{} = B(\frac{z}{1+\bar{z}z}).$$

これがベレーズィン表現をなすわけで，上の作用素が $\tilde{\mathcal{V}}$ を生成するので，代数 $\tilde{\mathcal{V}}$ の真空表現がベレーズィン表現になっていることが分かる．

9.3　逆元を使う局所化

$\tilde{\mathcal{V}}$ は真空表現とか，ベレーズィン表現を持っていて都合が良いのだが，生成元に関する関係式は (9.12)式のようになっていて，古典的には解釈できない ϖ_1, ϖ_2 のような元が現れる．そこで作用素表現は一応無視して，逆元を添加した代数で考えることにする．

量子論においては，局所化とは何をどうすることかという明確な考えは無い．だから，他から何の影響も受けない純粋単純系を実験室内に実現すると

いうのがどういうことかはっきりしない．例えば，古典的に他から切り離されている系を作ればそれが量子論まで考えても他から切り離されているというのなら問題は無いだろう．これは，幾何学で昔からある内的(intrinsic)理解，外的(extrinsic)理解の論議である．しかし，そのように他から切り離すために逆元を添加して考えるとかなり大きな影響が現れるのである．

前節では ζ_i^{-1} を使用しないで，半逆元を使用してきた．その理由は ζ_i^{-1} を許し，$e^{t\bar{\zeta}_i}$ を許すと ζ_i は絶対可逆となり，$r_i = \sqrt{\bar{\zeta}_i\zeta_i}$ として r_i^{-1} の形式的冪級数を扱わねばならなくなり，行列表現が作りにくくなるのを避けたためであった．

9.3.1 $\mathcal{C}$ の局所生成系

ここで局所化，局所生成系の少し別の考え方を与えておこう．これは形式的な場合に近いものである．$\mathcal{C} \subset C^\infty(\mathbb{C}^2_*)[[\hbar]]$ でもあったから，ここでの感覚を少し利用しよう．$U_+ = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2; \zeta_1 \neq 0\}, U_- = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2; \zeta_2 \neq 0\}$ とする．そこで，$U_\pm$ で考えるということは $\pm$ に応じて $\zeta_i, i = 1, 2$ を可逆元と考えるということだと割り切ることにして，逆元を添加して $\mathcal{C}_{U_i} = \mathcal{C}[\zeta_i^{-1}]$ を考えることにする．しかし，前にも注意したが，このようなものは結合代数にはなっていないし，$\zeta_i^{-1} * \varpi_i$ のように発散してしまって積が定義できない場合もあるので，このようなものを代数と呼ぶと誤解の種なのだが，他に適当な呼び名がないのでこれも代数と呼んでおこう．

逆元の添加による影響

$\mathcal{C}_{U_i}, i = 1, 2$ では，ξ_i^{-1} が考えられ，さらに次のような元も考えられる：

$$z = \zeta_1^{-1} * \zeta_2 = \xi_1^{-1} * \xi_2 \quad w = \zeta_2^{-1} * \zeta_1 = \xi_2^{-1} * \xi_1.$$

容易に

$$z * w = 1, \quad [\mu, z] = [\mu, \bar{z}] = 0, \quad [\mu, w] = [\mu, \bar{w}] = 0$$

となることが分かるが，z 及び w は行列としては表現されない．そのかわり，幾何的描像を獲得するので，幾何学的な言葉で量子化の手続きを述べること

ができるようになる．

この代数は $C^\infty(U_\pm)[[\hbar]]$ に拡張でき，この中で $R(e^t)$-不変な要素全体のなす部分代数が考えられる．これらは $\mathcal{C}$ の局所化と見なせるから $\mathcal{C}_{U_+}, \mathcal{C}_{U_-}$ のように書くことにする．

まず，次のことに注意しよう．証明も容易であろう：

補題 9.5

$$[z{*}\bar{z},\ \bar{z}{*}z] = 0, \quad [w{*}\bar{w},\ \bar{w}{*}w] = 0.$$

代数と呼びはしたが，$\mathcal{C}_{U_\pm}$ は積 $*$ で閉じておらず，その意味で第1章で完備ワイル空間と呼んでいたものに近いものであるが，$\mathcal{C}_{U_+}$，$\mathcal{C}_{U_-}$ の中でそれぞれ $\{\mu, z, \bar{z}, \xi_1, \bar{\xi_1}, \xi_1^{-1}, \bar{\xi}_1^{-1}\}$，$\{\mu, w, \bar{w}, \xi_2, \bar{\xi_2}, \xi_2^{-1}, \bar{\xi}_2^{-1}\}$ によって生成される結合代数を考える[注6]．ここでも，(9.4)で示された関係式はそのまま成立している．しかし上のような局所化を行ったので，(9.8), 補題 9.3, (9.12)等を読むときには，少し注意が必要で，ζ_1 を可逆としている $\mathcal{C}_{U_+}$ では $\mathrm{mod}\,\varpi_1$ で計算すべきだから，$\mathcal{C}_{U_+}$，$\mathcal{C}_{U_-}$ で考えているときには，それぞれ ϖ_1，ϖ_2 を0として扱う．

補題 9.6 $\{\mu, z, \bar{z}, \xi_1, \bar{\xi_1}\}$, $\{\mu, w, \bar{w}, \xi_2, \bar{\xi_2}\}$ で成立する関係式は平行しているので，最初の方だけで述べるが，次の関係式が成立する：

$$\begin{aligned}&[\mu^{-1}, z] = 0, \quad [\mu^{-1}, \xi_1] = -\xi_1, \quad [z,\, \xi_1] = [z,\, \xi_2] = 0,\\ &[\bar{z},\, \bar{\xi_1}] = [\bar{z},\, \bar{\xi_2}] = 0, \quad [z,\, \bar{\xi_1}] = -\mu * \xi_1^{-1} * z * \sqrt{1+\mu}.\end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\begin{aligned}&[z,\, \bar{z}] = \mu(1 + z * \bar{z}) * (1 + \bar{z} * z),\\ &[z,\, (1 + \bar{z}{*}z)^{-1}{*}\bar{z}] = \mu.\end{aligned} \tag{9.18}$$

2番目の式は $(1 + \bar{z}{*}z)^{-1}{*}\bar{z}$ が z の量子正準共役量であることを示している[注7]．

注6 このようなものが結合代数を作っているということは，決して自明なことではないのだから，本来ならばここにもっと紙面をさいて論ずるべき所である．

注7 これまでの考察で，$\mu, z, \bar{z}, w, \bar{w}$ は $*$-積に関して代数を生成している．これを非可換球面の代数と呼ぶべきかもしれないが，このようにはっきりした量子正準共役量を持つことから，前に述べたのと同じ理由でこの代数は行列表現をもたないもののように思われる．

$$(1+\bar{z}*z)^{-1}=\xi_1*\bar{\xi}_1,\qquad \mu+\bar{z}*z*(1+\bar{z}*z)^{-1}=\xi_2*\bar{\xi}_2 \tag{9.19}$$

も成立している．

証明　$z=\xi_1^{-1}*\xi_2$ と公式 (9.9)を思い出すと (9.17)は容易に得られる．(9.18)については

$$\begin{aligned}&=\zeta_1^{-1}*\zeta_2*\bar{\zeta}_1^{-1}*\bar{\zeta}_2-\bar{\zeta}_1^{-1}*\bar{\zeta}_2*\zeta_1^{-1}*\zeta_2\\&=-2\hbar(\bar{\zeta}_1*\zeta_1)^{-1}*(1+(\zeta_1*\bar{\zeta}_1)^{-1}*\bar{\zeta}_2*\zeta_2)\\&=\mu(1+z*\bar{z})*(1+\bar{z}*z)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}&=[z,(1+\bar{z}*z)^{-1}]*\bar{z}+(1+\bar{z}*z)^{-1}*[z,\bar{z}]\\&=-(1+\bar{z}*z)^{-1}*[z,\bar{z}]*z*(1+\bar{z}*z)*z\\&=\mu\end{aligned}$$

となる．(9.19)の最初の式は，次の計算で分かる：

$$\begin{aligned}(1+\bar{z}*z)*\xi_1*\bar{\xi}_1&=(1+\bar{\xi}_2*\bar{\xi}_1^{-1}*\xi_1^{-1}*\xi_2)*\xi_1*\bar{\xi}_1\\&=\xi_1*\bar{\xi}_1+\bar{\xi}_2*\bar{\xi}_1^{-1}*\xi_2*\bar{\xi}_1\\&=1.\end{aligned}$$

同様，(9.19)の第 2 式も得られる．　□

$U_+\cap U_-$ 上では z と w は可逆で $z*w=1$ が成立している．これらの生成元系の間の関係(つまり座標変換)は

$$\{\mu,\ w,\ \bar{w},\ \xi_2,\ \bar{\xi}_2\}=\{\mu,\ z^{-1},\ \bar{z}^{-1},\ \xi_1*z,\ \bar{z}*\bar{\xi}_1\} \tag{9.20}$$

で与えられる．変数に束縛を与える関係式は

$$(1+\bar{z}*z)^{-1}-\xi_1*\bar{\xi}_1=0,\quad (1+\bar{w}*w)^{-1}-\xi_2*\bar{\xi}_2=0 \tag{9.21}$$

である．

$[z,\xi_1]=[\bar{z},\bar{\xi}_1]=0$ に注意すれば，$\bar{w}*\big((1+\bar{z}*z)^{-1}-\xi_1*\bar{\xi}_1\big)*w$ より第 2 の関係が得られる．

座標変換 (9.20)は次のように理解される：

(i) まず，$\mathbb{C}^2$ の複素 1 次元部分空間を 1 点と見てその全体を $P^1(\mathbb{C})$ とする．$\{\mu,z\}$ と $\{\mu,w\}$ はその 1 次元部分空間を，その「傾き」(ζ_1 と ζ_2 の比)で表

示したもので，リーマン球 $P^1(\mathbb{C}) = S^2$ の正則な局所座標系を与えている．
(ii) $(\xi_1, \bar{\xi}_1)$ は z が表す複素1次元部分空間と $\mathbb{C}^2$ の中の単位球面 S^3 との交わりの部分で，半径が(9.21)の円周として表示されている．つまり，S^3 が複素1次元部分空間との共通部分である S^1 で覆われており，この S^1 一つ一つが $P^1(\mathbb{C})$ の点に対応している．こういう構造を一般にファイバー束(fiber bundle)と呼ぶ[注8]が，この場合は特にホップ(Hopf)束と呼ばれている．式(9.20)はこのホップ束の座標変換を与えているのである．

$\mathbb{C}^2 - (0,0)$ の点を (ζ_1, ζ_2) としたとき，比 $(\zeta_1 : \zeta_2)$ は $P^1(\mathbb{C})$ の点を表すが，$(\zeta_1 : \zeta_2)$ は同時に点 (ζ_1, ζ_2) を通る複素1次元部分空間をも表している．つまり，

$$(\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta_2/\zeta_1; \zeta_1), \quad (\zeta_1, \zeta_2) = (\zeta_1/\zeta_2; \zeta_2)$$

のように考えているのである．したがって，$P^1(\mathbb{C})$ の各点 z に z が表している複素1次元空間(これを z で決まるファイバーと呼ぶ)をつけて考えることができる．このような構造を一般に線束と呼ぶが，この場合の線束 L は特にトートロジー的(同義反復的，tautological)線束と呼ぶ．

底空間の各点で，その点できまるファイバー内の一点を対応させる対応を切断(cross section)と呼ぶ．

補題9.6より $[z, \xi_i] = 0$, $[w, \xi_i] = 0$ $(i = 0, 1)$ だから，ξ_1, ξ_2 は L の正則切断に対応していると考えられるが，いわゆる写像として定義されたものではなく，単に代数の元にすぎないが，このようなものを**正則 q-切断**と呼んでおこう．

U_+ (resp. U_-) 上では $\xi_2 = z * \xi_1$ (resp. $\xi_1 = w * \xi_2$) であり，同様に

$$\xi_1^k * \xi_2^l, \quad (k + l = m)$$

注8　ファイバー束とは直積の構造より少し微細なもので，直積 $X \times Y$ の場合は，点 $(x, y) \in X \times Y$ において，x を止めて y を動かすことも，y を止めて x を動かすことも自由だが，X を底空間，Y をファイバーと考えるファイバーバンドルにおいては点は $(x; y)$ のように書かれ，x を止めて y を動かすのは自由だが，y を止めて x を動かすのは局所的にしか意味をなさないような空間である，言い替えれば，点を表すのに順序が大切で，まず底空間 X の点 x を指定し，その後でないと Y の点が指定できないような構造である．

は正則線束 L^m の正則 q-切断全体のなす空間 $\mathcal{H}_m$ の線型基底と見なせる．U_+ (resp. U_-) 上では

$$\xi_1^k * \xi_2^l = z^l * \xi_1^m, \ (\text{resp.} \ = w^k * \xi_2^m)$$

であり，座標変換は次で与えられる：

$$\xi_1^k * \xi_2^l = w^k * \xi_2^m = (w^k * \xi_1^m) * z^m = z^l * \xi_1^m.$$

ここで**束縛関係**((9.21)参照)なる概念をはっきり定義しておこう：

束縛関係とは，$\hbar = 0$ または $\mu = 0$ においても意味のある関係式を与えるものを指す．従って，我々の系では交換子積で書かれている関係式は束縛関係とは見なされない(何故なら，それは可換な世界に投影したときには意味を持たないから)．

束縛関係のない(free な)局所生成系を得るには局所化を使う．これにより $\tau_\pm \in C^\infty(\tilde{W}_\pm)$ が定義される．ただし $\tilde{W}_\pm$ は次のように定義される $U_\pm - \{0\}$ の普遍被覆空間である：

$$e^{i\tau_+} = |\xi_1|^{-1} * \xi_1, \quad e^{i\tau_-} = |\xi_2|^{-1} * \xi_2$$

のように置く．ただし，$|\xi_i|^{-1} = \sqrt{\bar{\xi}_i * \xi_i}^{\,-1}$ である．これは，前節では半逆元を作るために使われていたものである．ここでの計算では，すべてが $\mathrm{mod}\varpi_1$ になってしまうために，上のような計算で，ユニタリー部分が出てくるのである．

$\{\mu, z, \bar{z}, e^{i\tau_+}\}$, $\{\mu, w, \bar{w}, e^{i\tau_-}\}$ は束縛関係のない局所生成系である．座標変換は

$$\{\mu,\ w,\ \bar{w},\ e^{i\tau_-}\} = \{\mu,\ z^{-1},\ \bar{z}^{-1},\ e^{i\theta} * e^{i\tau_+}\} \tag{9.22}$$

で与えられる．ここで，$e^{i\theta}$ は極座標系による z のユニタリー部分である．

次の関係式は容易に分かる：

$$e^{i\theta} * e^{i\tau_+} = e^{i\tau_+} * e^{i\theta}$$

座標変換(9.22)はリーマン球 $P^1(\mathbb{C}) = S^2$ 上の S^3 のホップ束を与えるものと見なせる．式 (9.21)により，

$$\xi_1 = {}^*\sqrt{1+\bar{z}*z}^{-1} * e^{i\tau_+}, \quad \xi_2 = z * {}^*\sqrt{1+\bar{z}*z}^{-1} * e^{i\tau_+}$$

が分かり，

$$[\mu^{-1}, e^{i\tau_\pm}] = -e^{i\tau_\pm}$$

も分かる．もし $\tau_\pm = -i\log e^{i\tau_\pm}$ が考えられるように $e^{i\tau_\pm}$ を適切な角領域(sector)の上に制限するならば

$$[\mu^{-1}, \tau_\pm] = i, \qquad 従って \quad [\tau_\pm, \mu] = \mu^2 i$$

が分かる．S^2 上の関数とは μ と可換な $\mathcal{A}^\infty$ の元のことであり，$\{U_+; \mu, z\}$ とか $\{U_-; \mu, w\}$ は S^2 の局所正則座標関数とみなされる．局所座標変換 $w = \frac{1}{z}$ が $\bar{z}$ を含まないことから**正則**だと言うのである．

U_+ (resp. U_-)上で次のように置く：

$$\xi_+ = \sqrt{2}{}^*\sqrt{1+z*\bar{z}}^{-1} * z, \quad (\text{ resp. } \xi_- = \sqrt{2}{}^*\sqrt{1+w*\bar{w}}^{-1} * w).$$

すると，

$$[\xi_+, \bar{\xi}_+] = 2\mu \qquad (\text{ resp. } [\xi_-, \bar{\xi}_-] = 2\mu) \tag{9.23}$$

が分かるから，極分解 $\xi_\pm = \rho_\pm * e^{i\theta_\pm}$ を取ってみると $e^{\theta_\pm}$ は z, w それぞれのユニタリー部分であることが分かる．

補題 9.7 うまく角領域を選ぶと $\log e^{i\theta_+}$ が定義でき，そこで

$$[\frac{1}{2}\rho_+^2, \theta_+] = i\mu$$

が成立する．

証明　式(9.23)より，$\rho_+^2 - e^{-i\theta_+} * \rho_+ * e^{i\theta_+} = 2\mu$ だから，$[\rho_+^2, e^{i\theta_+}] = -2\mu * e^{i\theta_+}$ となり，これの log を取ればよい． □

次は容易であろう：

補題 9.8

$$[\mu, \xi_+] = 0, \quad \xi_+ * e^{\tau_+} = e^{\tau_+} * \xi_+ * {}^*\sqrt{1-\mu}^{-1}$$

$\{\mu, \rho_+^2/2, \theta_+, \tau_+\}$ (resp. $\{\mu, \rho_-^2/2, \theta_-, \tau_-\}$) を局所生成系と見なすと補題 9.7 より $[\mu, \rho^2] = [\mu, \theta] = 0, [\frac{1}{2}\rho_+^2, \theta_+]$ が分かり，

$$[\tau_+, \mu] = 2\mu^2,\ [\tau_+, \theta_+] = 0,\ [\tau_+, \rho^2/2] = 2\mu\rho^2/2.$$

となる．

次のものは非可換接触代数の局所正準座標系と見なせる：

命題 9.1

$$[\tau_+, \mu] = 2i\mu^2,\ [\tau_+, \xi_+] = i\mu * \xi_+,\ [\tau_+, \bar{\xi}_+] = i\mu * \bar{\xi}_+.$$

座標変換は次のように与えられる：

$$(\rho_-,\ \theta_-,\ e^{\tau_-}) = (2 - \rho_+,\ -\theta_+,\ e^{i\theta_+} * e^{\tau_+}).$$

このように逆元を自由に添加して局所化を行うと，古典的微分幾何との対応はかなり明瞭にはなるのだが，それと同時に作用素表現のほうはあきらめなければならなくなるのである．

第10章
あいまい二重被覆

5 章で正規順序表示，ワイル順序表示を総動員して $e_*^{\frac{1}{\hbar}2\text{ 次式}}$ の形の元が生成する "群" を考えたが，極地元という得体のしれない 2 価の元(これは離散描像では支持されていた)等が現れ，それがどのようなものかについては少々不明確なまま残っていた．

この章では，M^3 と $\varepsilon_{00} * M^3$ とを合わせて考え，これが $*$-積で閉じていることを示す．しかし M^3 と $\varepsilon_{00} * M^3$ とは自然な形では貼合せられず，$\pm$ を無視するような無理をして貼合せたものが $SL(2,C)$ と同型な群になるのである．

従って，$M^3 \bigcup \varepsilon_{00} * M^3$ が多様体として貼合ってしまうと，それは単連結である $SL(2,C)$ の二重被覆群となり，$SL(2,C) \times \{\pm 1\}$ と同型にならなければならないことになるのだが $M^3 \bigcup \varepsilon_{00} * M^3$ は群の演算で生成され連結と考えるべきものである．

このことから，$M^3 \bigcup \varepsilon_{00} * M^3$ を点集合として考えようとすれば，$SL(2,C)$ の特異二重被覆として考えなければならないが，そうするとその特異点集合は他の場所とは違う性質を持つことになるから，$\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ の作用が縮退している場所がないと困るであろう．ところが，5 章で示したように，真空点以外，そんな場所はなかったのである．

そこで，普通の意味の点集合ではないので，$M^3 \bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ のように書くことにする．$M^3 \bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ は複素群 $SL(2,C)$ の，あたかも二重被覆群の

ように振舞うのである．これに点描像をあてはめようとした途端にこれはどこかに特異点を持った二重被覆としなければならないのだが，それがどこであるかきまっていないのである．このことが困るかというとその逆でここはあいまいにしたまま計算は進められるというのがこの章での観察結果である．

10.1　貼合せ写像

我々は M^3 と $\varepsilon_{00}*M^3$ を補題 5.3 を使って $a \to \varepsilon_{00}*a$ という写像で貼合せて考えたいのであるが，補題 5.3 の $\varepsilon_{00}*$ が定義できるのは $c^2-ab \neq 0$ の場合のみである．根号の $\pm$ の不定性は局所的には調整できても大域的には調整不可能である．しかし指数法則を使う限り $\varepsilon_{00}^{-1} = -\varepsilon_{00}$ つまり $e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv} = -e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ とすべきであるから注意がいる．

大域的には $\{\pm a\}$ をひとかたまりにみて，$\{\pm a\} \to \varepsilon_{00} * \{\pm a\}$ という写像しか意味をなさなくなるが，そうすると，こんどは貼合せ写像自身も $\{\pm a\} \to \{\pm\varepsilon_{00}\} * \{\pm a\}$ のように考えることができる．補題 5.3 は様々に解釈できるのである．

$c^2 - ab = 0$ の場合には，$SL(2,\mathbb{C})$ での変換を考えれば，計算は次で代表される．複号独立で

$$e_*^{\pm\frac{t}{\hbar}2uv} * (\pm e^{au^2}) = \pm\sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{1}{\hbar}(a(1+is)^2u^2+2suv)}, \quad \tan t = s.$$

これは $*$-指数関数の形に書かれるから M^3 の元である．

しかし $t \to \pm\frac{\pi}{2}$ とすると $s \to \infty$ となるから $e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}uv} * (\pm e^{au^2})$ は M^3 の元とはならず，無限遠方に飛んでいってしまう．つまり，判別式が零の元は貼合せの対称にならないのである．

貼合せの定義域(のりしろ)は

$$M_*^3 = M^3 - \{\pm e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\ c^2-ab=0\}$$

であり，この集合の元は全部 1 径数部分群の上に載っているのである．しかも，補題 5.3 により $\varepsilon_{00}*$ は M_*^3 から M_*^3 の上への(2 対 2 の)写像となっている．

$M^3\bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ はリーマン球を考えるときに $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}$ とを $w=\frac{1}{z}$ で貼合せたと思うかわりに $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と思ったように，5 章の境界元の項を参考にして，M^3 の無限遠方に集合 $\varepsilon_{00} * \{\pm e^{\frac{1}{\hbar}au^2+bv^2+2cuv}; c^2-ab=0\}$ が貼ついていると思う方が簡単であろう：

$$M^3 \cup_* \varepsilon_{00} * M^3 = M^3 \cup \varepsilon_{00} * \{\pm e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}; c^2-ab=0\}$$

と考えるのである．

10.1.1 ε_{00} を含む積公式

補題 5.3 は前に $*$-積が計算できていなかった $1-2cs+(c^2-ab)s^2=0$ 及び $1+bt=0$ の場合の計算に使われる：

$$e^{\frac{t}{\hbar}u^2} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},$$
$$(1+bt=0 \text{ のとき発散})$$
$$\sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},$$
$$(1-2cs+(c^2-ab)s^2=0 \text{ のとき発散})$$

であったが，次のことが分かる：

系 10.1 $1+bt=0$ の時には，

$$e^{\frac{t}{\hbar}u^2} * \left(\varepsilon_{00} * \sqrt{c^2-ab+1}\ \ e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{\hbar(c^2-ab+1)}(a+(ab+(ci-1)^2)tu^2+bv^2+2(c-ibt)uv)}$$

であり，右辺の判別式は (5.11)を用いれば $1+bt=0$ を使って零であることが分かり，$e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u+\beta v)^2}$, $\alpha\beta\neq 0$, の形に書かれる．

つまり，3 章の補題 3.9 より ε_{00} は $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ のような元とは可換で，$\varepsilon_{00}^2=-1$ だから

$$e^{\frac{t}{\hbar}u^2} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$= -\varepsilon_{00} * \left(e^{\frac{t}{\hbar}u^2} * (\varepsilon_{00} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)})\right)$$

とする．一方

系 10.2 $1-2cs+(c^2-ab)s^2=0$ の時には，

$$\big(c-(c^2-ab-1)s-cs^2\big)^2-ab(1+is)^2(1-is)^2$$
$$=\big((c^2-ab+1)(1+s^2)-((c^2-ab)s^2-2cs+1)\big)\big((c^2-ab)s^2-2cs+1\big)$$

に注意すると，次の式

$$\Big(\varepsilon_{00}*\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2uv}\Big)*\sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$=e^{\frac{1}{\hbar(c^2-ab+1)(1+s^2)}\big(a(1+is)^2u^2+b(1-is)^2v^2+(c-(c^2-ab-1)s-cs^2)2uv\big)}$$

が得られる．やはり右辺の判別式は零となり，従って $e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u+\beta v)^2}$, $\alpha\beta\neq 0$, の形に書かれる．

これも，上の場合と同様，

$$\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2uv}*\sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$=-\varepsilon_{00}*\Big(\big(\varepsilon_{00}*\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2uv}\big)*\sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\Big)$$

とするのである．このように定義すると，これまで計算できないとしていたところも計算可能になる．

実数に制限するときの注意

実数に制限するときには $e_*^{\frac{i}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ の形の元で生成されるものか，あるいは $e_*^{\frac{1}{\hbar}(au^2-bv^2+2ciuv)}$ の形の元で生成されるものを考える．この場合極地元になるのは $e_*^{\pm\frac{\pi}{2\hbar}i(u^2+v^2)}$, $e_*^{\pm\frac{\pi}{2\hbar}(u^2-v^2)}$ のような元であるから，これで貼合せの写像を作らねばならないが，生成元を変換して上の形にするのである．特に $e_*^{\frac{t}{2\hbar}i(u^2+v^2)}$, $e_*^{\frac{t}{2\hbar}(u^2-v^2)}$ は周期 4π の1径数部分群として入っている．

注意すべきは，判別式は正にも負にもなり得るということである．$ab-c^2>0$ の所で貼合せの写像を考えるときには問題ないが，$ab-c^2<0$ の所で貼合せると，振幅部分の実と虚が入れ替わる．

10.2　あいまい二重被覆

もう少し貼合せを詳しく見るために，振幅部分を無視して位相部分にのみ注目してみよう．$V_\mu=\{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3; c^2-ab+1=0\}$, $\Sigma_0=\{(a,b,c)\in$

$\mathbb{C}^3; c^2 - ab = 0\}$ とし，$D = \mathbb{C}^3 - V_\mu$ とする．写像

$$\iota:\ \mathbb{C}^3 - \Sigma_0 \to \mathbb{C}^3 - \Sigma_0, \quad (a,b,c) \mapsto -\frac{1}{c^2 - ab}(a,b,c)$$

は $\iota^2 = 1$ となる同相写像で，不動点集合が V_μ である．

これらの集合のコピーを考え $'$ をつけて表すことにする．V^3 を $\mathbb{C}^3$ と $\mathbb{C}^{3\prime}$ を ι で貼合せて出来る複素多様体とする．これは一見簡単に見えるが，位相空間として考えるときには $\mathbb{C}^3$ の無限遠の扱いに注意がいる．

写像

$$f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}; \quad f(a,b,c) = c^2 - ab$$

は，V^3 からリーマン球 $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ への写像として自然に拡張される．

そこで，$f^{-1}(p)$, $p \in \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ の構造を見ると $p = 0, \infty$ 以外は全部複素多様体

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3; c^2 - ab = 1\}$$

に同相で，$p = 0, \infty$ の所で $\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3; c^2 - ab = 0\}$ に同相となっていることが分かる．この集合は $(a,b,c) = (0,0,0)$ のみが特異点で，ここを除けば多様体である．

$f^{-1}(|c^2 - ab| \leq 1)$ と $f^{-1}(|c^2 - ab| \geq 1)$ は同型で，この二つが $f^{-1}(|c^2 - ab| = 1)$ の所で貼ついている．$f^{-1}(|c^2 - ab| = 1)$ は $S^1 = \{e^{i\theta}\}$ 上の，ファイバー $\{c^2 - ab = e^{i\theta}\}$ のファイバーバンドルで，貼合せの写像は $\iota(e^{i\theta}; (a,b,c)) = -e^{-i\theta}(a,b,c)$ である．

V^3 の開部分多様体として，D と D' とを ι で貼合せて出来るものを考え $D\bigcup_\iota D'$ と表す．$V^3 - f^{-1}(-1) = D\bigcup_\iota D'$ である．

補題 10.1 $D\bigcup_\iota D'$ は単連結である．

証明 $V^3 - f^{-1}(-1)$ 内に閉曲線 C を取る．$f(C)$ は $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\} - \{-1\}$ の中で一点に縮められる．このホモトピーが $V^3 - f^{-1}(1)$ の中で C を一点に縮めるホモトピーとして追跡できればよい．$V^3 - f^{-1}(-1) = D\bigcup_\iota D'$ は $f^{-1}(\{\mathbb{C}\bigcup\{\infty\} - \{0, 1, \infty\}\})$ の所ではファイバーバンドルの構造を持っており，これを使うと，このような場所では C を縮めるホモトピーとして追跡できる．$f(C)$ を一点に縮めるホモトピーはどこかで $p = 0, \infty$ を通過するかもしれないが，ホモトピーをちょっと修正すれば，この

場合でもファイバーの特異点に到達しないようにできる．このことから，特異点の存在はホモトピー追跡の邪魔にはならず，$V^3 - f^{-1}(1)$ の中で C を一点に縮めることができる． □

10.2.1 $\mathrm{Ad}(M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3))$

上で $M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)$ という記号を用いているが，M^3 と $\varepsilon_{00} * M^3$ の貼合せがきちんとしていないので，この性質をはっきりさせておこう．

まず，u, v で張られる 2 次元空間 $\mathbb{C}^2$ への随伴表現による像

$$\mathrm{Ad}(M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3))$$

は $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv} = \varepsilon_{00}$ であったから，$\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv})f(u,v) = f(-u,-v)$ であることを考えれば，2×2 行列群 $SL(2;\mathbb{C})$ そのものであることが分かる．

次の定理を証明しよう：

定理 10.1 $M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)$ は $\pm$ を無視すれば $SL(2;\mathbb{C})$ と同型な群をなす．もっと正確には $\mathrm{Ad}(M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)) \cong SL(2;\mathbb{C})$ である．特に，$\mathrm{Ad}(\varepsilon_{00}) = -1$ である．

しかし，$M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)$ の中には $SL(2;\mathbb{R}), SU(1,1)$ の二重被覆群が含まれている．

証明　$\pm 1 \in M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)$ だし，$M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)$ が $SL(2;\mathbb{C})$ と局所同型な局所群であることは分かっているから，$\mathrm{Ad}(M^3 \cup (\varepsilon_{00} * M^3))$ が群をなすことだけを示せば良いであろう．ちなみに，$SL(2;\mathbb{C})$ は単連結であり，中心(center) $\{\pm 1\}$ を持つ．

$e_*^{\frac{t}{\hbar}uv}$ は全ての $t \in \mathbb{C}$ に対して定義できていることに注意しよう．そうすれば，以下のように書かれた元

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}uv} * e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * e^{\frac{s}{\hbar}v^2} * e^{\frac{\rho}{\hbar}u^2}$$

が $*$-積で閉じることを示せば十分である．

交換法則を与える定理 1.6 により，$e_*^{\frac{t'}{\hbar}uv}$ のように書かれた項は左側に寄せてしまうことができる．従って，以下のような項

$$e^{\frac{s}{\hbar}v^2} * e^{\frac{r'}{\hbar}u^2} * e^{\frac{s'}{\hbar}v^2}$$

が次のような形に変形できればよい：

$$e^{\frac{\tau}{\hbar}uv} * e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * e^{\frac{s}{\hbar}v^2} * e^{\frac{\rho}{\hbar}u^2}.$$

これは式(5.27)，補題 5.2 などにより可能である．

M_R^3 に無限小に働く $SL(2;\mathbb{R})$ は $\frac{i}{\hbar}u^2, \frac{1}{\hbar}2iuv$, $\frac{i}{\hbar}(u^2+v^2)$ で生成されるリー代数であり，M_R^3 に無限小に働く $SU(1,1)$ は $\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2), \frac{1}{\hbar}2iuv$, $\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)$ で生成されるリー代数だが，$e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}v^2}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}(u^2-v^2)}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}2iuv}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}(u^2+v^2)}$ の随伴表現を見ると次のようになっている：

$$e_*^{\frac{r}{\hbar}u^2} \to \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -ri, & 1 \end{bmatrix}, \quad e_*^{\frac{s}{\hbar}iuv} \to \begin{bmatrix} e^{-s}, & 0 \\ 0, & e^s \end{bmatrix}, \quad e_*^{\frac{t}{\hbar}v^2} \to \begin{bmatrix} 1, & ti \\ 0, & 1 \end{bmatrix},$$

$$e_*^{\frac{\theta}{2\hbar}(u^2+v^2)} \to \begin{bmatrix} \cosh\theta, & i\sinh\theta \\ -i\sinh\theta, & \cosh\theta \end{bmatrix}, \quad e_*^{\frac{s}{2\hbar}(u^2-v^2)} \to \begin{bmatrix} \cos s, & i\sin s \\ i\sin s, & \cos s \end{bmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)} * e_*^{\frac{s}{\hbar}iuv} * e_*^{\frac{ti}{\hbar}u^2}); r,s,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \cos r, & -\sin r \\ \sin r, & \cos r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s}, & 0 \\ 0, & e^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ t, & 1 \end{bmatrix}; r,s,t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

となり，$e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)}$ の周期が 4π であることを考えれば，$M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)$ の中に $SL(2;\mathbb{R})$ の二重被覆群が含まれていることが分かる．$SU(1,1)$ についても同様である．つまり，このような集合の上では $\pm\sqrt{\cdot}$ の処理が不定性なく行えるのである．

しかし，明らかに随伴表現は $\pm A$ を一つの元に写している．$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(u^2-v^2)} = \varepsilon_{00}$, $e_*^{\frac{2\pi}{2\hbar}(u^2-v^2)} = -1$ であるから，$e_*^{\frac{s}{2\hbar}(u^2-v^2)}$ の周期は 4π であり，随伴表現は周期を半分にしている．前にも述べたが随伴表現は多くの情報を失ってしまうのである．□

$M^3 \bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ の元は $\pm a$ のようにいつも対になっているのだが，対のままで複合独立に $\{\pm a\} * \{\pm b\} = \{\pm a * b\}$ のように計算できる．このように対のままで複合独立に計算するのは，$\pm$ を無視して計算するのと同じことで，貼合せも対のままで行われているのだが a が単位元に近いときには $a * \{\pm b\} = \{\pm a * b\}$ の様な計算もできるのである．この計算は $a * b, a * (-b)$ 別々に行うのである．

この貼合せは点集合的でないので考えにくいが局所的には多様体のように見えるものである．しかし，良く考えると，これは局所理論しかやって

こなかった古典微分幾何の範疇には入るものである．さらに面白いことに，$M^3 \bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ は $SL(2;\mathbb{R})$ の二重被覆群などを含んでいたのである．

10.2.2　不定性のない貼合せ

貼合せがあいまいなままでは不便だから，貼合せの定義域(のりしろ)が

$$M^3 - \{\pm e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)};\ c^2-ab=0\}$$

であって，ころ部分の元は全部1径数部分群の上に載っていることを利用して，M^3 と M^3 の貼合せ写像を不定性のないものにすることもできる．しかし，今度は貼合ったものは全体としてはかなり考えにくいものになってしまう．

式(3.4)，補題5.1を考慮して，次のように考えて一応貼合せの不定性を消してしまうことにする．(こうすると，別の所に不定性が現われるが．...)

貼合せの「のりしろ」の部分

$$(D-\{(a,b,c);c^2-ab=0\})\bigcup_{\iota}(D'-\{(a,b,c);c^2-ab=0\}')$$

は，連結だが単連結ではない集合となる．この上の二重被覆として不定性のない貼合せを次のように決めよう：

$$\begin{aligned}&e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv} * \frac{1}{\cos\sqrt{c^2-ab}\,t}e^{\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}\tan\sqrt{c^2-ab}\,t(au^2+bv^2+2cuv)}\\ &=\frac{1}{\cos\sqrt{c^2-ab}(t+\frac{\pi}{2})}e^{\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}\tan\sqrt{c^2-ab}(t+\frac{\pi}{2})(au^2+bv^2+2cuv)}.\end{aligned} \tag{10.1}$$

貼合せとは $\varepsilon_{00} * M^3$ の元

$$\varepsilon_{00} * \frac{1}{\cos\sqrt{c^2-ab}\,t}e^{\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}\tan\sqrt{c^2-ab}\,t(au^2+bv^2+2cuv)}$$

と M^3 の元 $\frac{1}{\cos\sqrt{c^2-ab}(t+\frac{\pi}{2})}e^{\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}\tan\sqrt{c^2-ab}(t+\frac{\pi}{2})(au^2+bv^2+2cuv)}$ とを同一視するものである．

$$\lim_{c^2-ab\to\frac{\pi^2}{4}} e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv} * \frac{1}{\cos\sqrt{c^2-ab}}e^{(\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}\tan\sqrt{c^2-ab})(au^2+bv^2+2cuv)} = 1$$

と補題 5.3 を使って，上の式は次のようにも書き直せる：

$$\lim_{c^2-ab\to\frac{\pi^2}{4}}\frac{1}{\sin\sqrt{c^2-ab}}e^{-(\frac{1}{\hbar}\cot\sqrt{c^2-ab})(au^2+bv^2+2cuv)}.$$

$\cos\theta=0$ は $\sin\theta=\pm1$ と同値である．

このように定義してしまうと，$\pm\sqrt{c^2-ab}$ の不定性も無く，かつ指数法則と調子が合った貼合せの公式となる．しかも $(e_*^{\pm\frac{\pi}{\hbar}uv}*)^2=-1$ である．

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}*M^3-\pi^{-1}\{c^2-ab=0\}\to\varepsilon_{00}*\left(M^3-\pi^{-1}\{c^2-ab=0\}\right).$$

これで，M^3 と $\varepsilon_{00}*M^3$ とがうまく貼合って複素多様体ができているように見えて，奇妙に感じるかもしれないが，できあがったものは多様体になっていない．

$$\begin{aligned}M_*^3=&M^3-\{\pm e^{au^2+bv^2+2cuv};c^2-ab=0\},\\ D_*^3=&\mathbb{C}^3-\{(a,b,c);c^2-ab=0,\ c^2-ab+1=0\}\end{aligned}$$

とすると，貼合せ写像は $\pi: M_*^3\to D_*^3$ なる二重被覆を定義しているが，この二重被覆は D, D' のどちらか片方にしか二重被覆としては拡張できず，他方では $\{(a,b,c);c^2-ab=0\}$ の部分で特異点となる特異二重被覆となる．

10.2.3 $\mathrm{Ad}^{-1}(SL(2;\mathbb{R}))$

定理 10.1 で $SL(2;\mathbb{R})$, $SU(1,1)$, の二重被覆が $M^3\bigcup_*\varepsilon_{00}*M^3$ の中に入っていると言ったのだが，それは $\mathrm{Ad}^{-1}(SL(2;\mathbb{R}))$, $\mathrm{Ad}^{-1}(SU(1,1))$ の形で入っている．

$\mathrm{Ad}^{-1}(SL(2;\mathbb{R}))$ でもう少し詳しく見よう．$r,s,t\in\mathbb{R}$ として

$$e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)},\quad e_*^{\frac{s}{\hbar}iuv},\quad e_*^{\frac{t}{\hbar}iu^2}$$

が $M^3\bigcup_*\varepsilon_{00}*M^3$ の中で生成するものを G_R として，これを見ようとしているのである．G_R の中には $e_*^{\frac{t}{2\hbar}i(u^2+v^2)}$ が周期 4π の 1 径数部分群として入っているが，始めは $\sqrt{\cdot}$ の不定性をつけたまま計算する．すると，$SL(2;\mathbb{R})$ の

二重被覆に見えるあいまい群が生成されてくるが，$SL(2;\mathbb{R})$ の基本群は $\mathbb{Z}$ なので，この不定性は解消される．

しかし，$e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)} = \frac{1}{\cos r}\, e^{i(u^2+v^2)\frac{1}{\hbar}\tan r}$ だから，

$$e_*{}^{\frac{ti}{\hbar}u^2} * e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-t\tan r}\cos r}\, e^{\frac{1}{1-t\tan r}((\tan r+(1-\tan^2 r)t)iu^2+(\tan r)iv^2+(t\tan r)2iuv)}$$

となり，$1-t\tan r<0$ のところで振幅部分に純虚数が現れる．

G_R の元をワイル順序表示で表示した場合振幅部分に現れるのは実数か純虚数かであり，他の形の複素数は現れない．

この二重被覆の部分は $e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)}$ の部分から現れるから，これの代わりに $e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u+iv)*(u-iv)}$ を使うと，周期が半分になり，$SL(2;\mathbb{R})$ そのものが出てくる．これは $M^3 \bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ の中に入っているのではなく，振幅部分がずれて入っているのである．

10.2.4　$\mathrm{Ad}^{-1}(SU(2))$

$SU(2)$ は $r,s,t\in\mathbb{R}$ として $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{r}{\hbar}(u^2-v^2)})$, $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{s}{\hbar}2uv})$, $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{t}{\hbar}i(u^2+v^2)})$ で生成されている．$SU(2)$ は 3 次元球面 S^3 と同相だから，単連結である．

$S^3=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2; |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ とし，この中で $z_i=0$ で定義される部分集合(実は S^1 と同位相)を S^1_i, $i=1,2$ とする．$S^3-S^1_i$ は単連結ではなく，基本群が $\mathbb{Z}$ となる．$\mathfrak{E}_i$ を $S^3-S^1_i$ の二重被覆空間とし，π_i を射影とする．$S^3=(S^3-S^1_1)\bigcup(S^3-S^1_2)$ であり，こちらは単連結だから次のことが分かる：

補題 10.2　$(\mathfrak{E}_1;\pi_1)$ と $(\mathfrak{E}_2;\pi_2)$ をバンドルとしてつないで多様体を作ることはできない．

しかし，$p\in(S^3-S^1_1)\bigcap(S^3-S^1_2)$ の所で $\pi_1^{-1}(p)$ と $\pi_2^{-1}(p)$ は共に $\mathbb{Z}_2$ だから集合としては同一視できる．しかし，それぞれも部分の基本群で $\mathbb{Z}_2$ が独立に動かされてしまうので点集合としての同一視はできない．そういうこ

とができるとすると，でき上がったものは S^3 上の連結な二重被覆空間とならねばならないがこれは不可能である．

無理して点集合的な描像を作るとこのようなものはかなり醜悪なものとなってしまうから，ブルバキ的論理では除外されてきたものであるが，こういうものもれっきとした数学の対象になるのである．

$(\mathfrak{E}_1;\pi_1)$ と $(\mathfrak{E}_2;\pi_2)$ を点集合としてつないで考えることはできないが，合わせて考えることはできるのである．これは考えにくいもので，全体としては点集合として考えることはできないが，局所的には多様体の構造を入れて考えられる．

従って，多様体ではないが，この上で局所的な話は全部やれるのである．数学の対象の中にこのようなものも入るようにしていかないと，量子論は数学の中に吸収できないと思われるのである．

$SL(2,\mathbb{C})$ は単連結だが，単位元を含まない部分集合 S で $SL(2,\mathbb{C})-S$ が単連結でなくなるようなものがある．M^3 は連結で $SL(2,\mathbb{C})-S$ の二重被覆になっている．$\varepsilon_{00}*M^3$ も同様だが $(-I)(SL(2,\mathbb{C})-S)$ の二重被覆になっている．

従って，M^3 と $\varepsilon_{00}*M^3$ を貼合せて多様体が作れるとすると，単連結空間の上に連結な二重被覆が作れるという矛盾になるから，無理に貼合せれば必ず特異点を持ったものになる．点集合として $M^3\bigcup\varepsilon_{00}*M^3$ を考えようとすれば，$SL(2,\mathbb{C})$ と，そのコピーを $-I$ の所でつないだような集合を考えなければならず，実際には ε_{00} と $-\varepsilon_{00}$ とを貼合せないといけなくなるのである．ところが，M^3 と $\varepsilon_{00}*M^3$ を合せたものはかなり群に近い性質も持っているから，特異点を持ったものを考えるよりは，このまま素直に考えるほうが良いと思われる．

10.2.5　あいまい積の定義

定理 5.1 より $F_1,F_2\in M^3$, $F_i=\pm\sqrt{D(Q_i)+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}Q_i}$, $i=1,2$ に対して F_1*F_2 が定義できないのは

$$P=(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)-D(Q_1+Q_2)=0$$

の場合だけであるが，その場合に $(\varepsilon_{00} * F_1) * F_2$ または $F_1 * (\varepsilon_{00} * F_2)$ を補題 5.3 を使って計算してみると，結果は

$$\varepsilon_{00} * F_1 * F_2 = \sqrt{-\frac{(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)}{D(Q_1+Q_2)}} e^{\frac{1}{\hbar}\bar{Q}_3}$$

で $D(\bar{Q}_3)$ は (5.32)式を使うと

$$\bar{Q}_3 = -\frac{1}{(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)+P} Q'_3$$

であるが，$P=0$ より $D(\bar{Q}_3)=0$ となることが分かる．

従って，

$$F_1 * F_2 = -\varepsilon_{00} * \sqrt{-\frac{(D(Q_1)+1)(D(Q_2)+1)}{D(Q_1+Q_2)}} e^{\frac{1}{\hbar}\bar{Q}_3} \in \varepsilon_{00} * M^3$$

と定義するのである．

その他の積は，$\varepsilon_{00} * F = F * \varepsilon_{00}$ を利用して

$$(\varepsilon_{00} * F_1) * F_2 = F_1 * (\varepsilon_{00} * F_2) = \varepsilon_{00} * (F_1 * F_2),$$
$$(\varepsilon_{00} * F_1) * (\varepsilon_{00} * F_2) = -F_1 * F_2$$

と定義する．これで $*$-積が 2 次式の指数関数全体にわたって定義できたわけである．しかし $\sqrt{1} = \pm 1$ の不定性は $P=0$ を保ったまま $Q_1 \to 0$ とできないので決められない．何がしかのルールを設けてこの不定性が消せないかと考えるのはもっともなことであるが，しかし，次のようになる：

命題 10.1 あいまい積は $\pm\sqrt{\cdot}$ の不定性を付けたままで結合律を満たす．$\sqrt{1} = \pm 1$ の不定性は局所的には消すことができるが，全体としては消すことができない．

証明　全体として消すことができたとすると，単連結である $SL(2;\mathbb{C})$ の二重被覆群で連結なものができたことになり矛盾がおこる．□

おもしろいのは，このように $\pm$ の不定性を持ってしか定義できていないものであっても局所的な計算はできるということである．$M^3 \bigcup_* (\varepsilon_{00} * M^3)$ は普通の意味ではリー群ではないが，局所的にはリー群としての計算が可能な

ものであり，かなり普通のリー群論に似た理論が作れるものである[注1].

10.3 極地元の性質

これまで述べてきた $M^3 \bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ の不思議な性質は皆極地元 ε_{00} が 2 価の元に見えるということに関係している．

ワイル順序表示での計算では $e_*^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は $c^2-ab=(m+\frac{1}{2})^2\pi^2$, $m\in\mathbb{Z}$ の所で M^3 の元としては定義できなかったが，これらは

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \quad au^2+bv^2+2cuv=\lambda(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)$$

のとき，正準共役対 $\alpha u+\beta v, \gamma u+\delta v$ に関する正規順序表示でならば計算できていた．さらに

$$e^{\frac{t}{\hbar}u^2} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},$$
$$\sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

等は $1+bt=0$, とか $1-2cs+(c^2-ab)s^2=0$ のときにはやはりワイル順序表示では計算できなかった．しかしこれらも正規順序表示でならば計算できるのである．

系 10.1，10.2 と定理 3.1 によれば $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=\varepsilon_{00}$ を使って

$$e^{\frac{t}{\hbar}u^2} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = -\varepsilon_{00} * e_*^{(\alpha u+\beta v)^2}$$

$$\sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * \sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = -\varepsilon_{00} * e_*^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u+\beta v)^2}$$

となるから $\varepsilon_{00} * e_*^{(\alpha u+\beta v)^2}$ が計算できればよい．これは $u'=\alpha u+\beta v$ に対して $v'=\gamma u+\delta v$ を $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ となるように取れば，u', v' が量子正準共役対となり，$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}=e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ であるから $\varepsilon_{00}=ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}u'\circ v'}$ と書かれることに注意して，(u',v') に関する正規順序表示を使って

$$\begin{aligned}\varepsilon_{00} * e^{\frac{1}{\hbar}(u')^2} &= e^{\frac{1}{\hbar}(u')^2} * \varepsilon_{00} = ie^{\frac{1}{\hbar}(u')^2} * e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u'\circ v'} \\ &= ie_\circ^{\frac{1}{\hbar}(u')^2} * e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u'\circ v'} = ie_\circ^{\frac{1}{\hbar}(u'\circ(u'+2iv'))}\end{aligned}$$

注1 抽象的定義を含めて，このような普通でないリー群論はできそうである．しかし，今のところ実例はここで述べたものだけである．

と計算する．

極地元は単一の元のようにも見えていてこれを ε_{00} のように表していたのだが，ここで次のことに注意しよう：

定理 10.2 量子正準共役対 $(\alpha u+\beta v,\ \gamma u+\delta v)$ による正規順序表示で ε_{00} を表示すると

$$\varepsilon_{00} = ie_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}(\alpha u+\beta v)\circ(\gamma u+\delta v)}$$

のようになる．

つまり，極地元は量子正準共役対に応じて様々な表示を持つわけである．

また，指数法則と球擡き補題（補題 3.4）により

$$\varepsilon_{00} * \varepsilon_{00} = -1, \quad u * \varepsilon_{00} + \varepsilon_{00} * u = 0$$

となることが分かっていた．

最初の等式から特に

$$ie_{*}^{\frac{\pi}{\hbar}(\alpha u+\beta v)*(\gamma u+\delta v)} = ie_{*}^{-\frac{\pi}{\hbar}(\alpha u+\beta v)*(\gamma u+\delta v)} = \varepsilon_{00}$$

も分かる．

これも，前と同様に極めて紛らわしいもので，かなり注意がいる．

$v' = v + au$ のように置くと $[u, v'] = -\hbar i$ であるからこれも量子正準共役対であり，(u, v) に関する正規順序表示では

$$e_{*}^{\frac{\pi}{\hbar}u*(v+au)} = e_{*}^{\frac{\pi}{\hbar}u*v} = e_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$$

となるのだが，これは定理 10.2 によれば (u, v') に関する正規順序表示では $e_{\circ'}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ' v'}$ となる．当然のことだが $e_{\circ'}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ'(v'-au)} \neq e_{\circ'}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ' v'}$ である．

一方，次の等式も得られる．(u, v') に関する正規順序表示では

$$e_{*}^{\frac{\pi}{\hbar}u*v'} = e_{*}^{\frac{\pi}{\hbar}(u+bv')*v'} = e_{\circ'}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ' v'}$$

だが，これは (u', v'), $u' = u + bv'$ に関する正規順序表示では $e_{\circ''}^{\frac{2i}{\hbar}u'\circ'' v'}$ のようになる．

次のことに注意しよう：

$$u' = u + b(v + au) = (1 + ab)u + bv, \quad v' = au + v$$

であるから，$a = 1, b = -1$ とすれば，いかにも次の式が成立していそうにも見えるであろう：

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar} u*v} = e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(-v)*(u+v)}.$$

しかし，$(-v)*(u+v) = -(u+v)*v - \hbar i$ だから $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(-v)*(u+v)} = -e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}(u+v)*v}$ となり，$(u+v, v)$ は量子正準共役対だから $e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}(u+v)*v} = e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(u+v)*v}$ であることに注意して，$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(u+v)*v} = e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}$ を使うと $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v} = -e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}$ が得られてしまう．これは前に極地元は単一の元よりなっていることを示した時のものと同じように見えるかもしれないが，$ie_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v} = \varepsilon_{00}$ だから少し違う所で起っていることである．

しかし上の等式は注意が要る．というのは，これらの式の両辺を同時に表示する正規順序で比較している訳でなく，両辺をそれぞれの正規順序表示で表示しているからである．これらのものを比較するには (u, v) 及び $(-v, u+v)$ に関する正規順序表示の間の相互変換を考えこれによってつながねばならない．しかしその相互変換にも $\pm$ の不定性があったのである．

次のことにも注意しよう．$c^2 - ab - 1 = 0$ の場合には

$$au^2 + bv^2 + 2cuv = (\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 2$$

と書かれる．したがって $e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$, $e_*^{-\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ の少なくとも一方はは極地元 ε_{00} のはずであるが，一方のみが極地元だとすると他方は $-\varepsilon_{00}$ となって $c^2 - ab - 1 = 0$ が連結だということを考えると困ったことになる．これは，上の因数分解を考えるときにどれを正準共役対とするかを言わないために起こる混乱のようにも思える．極地元を考えるときには，どれを正準共役対とするかを必ず述べないといけないわけで，それを述べない限り ± 1 の不定性がついてまわるのだが，そういうことを厳格に守ったとしても，この部分の不定性を完全に消すことは不可能なのである．不定性を完全に消すことは単連結集合の上に連結な二重被覆を定義することを意味してし

まうからである[注2].

10.3.1　極地元を含む積公式

前節までの様々な計算公式で極地元 ε_{00} や真空を含む積公式をまとめておく．まず

$$\varepsilon_{00}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}*\varepsilon_{00}$$

に注目する．$c^2-ab\neq 0$ ならば ε_{00} 及び $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は次の形に書かれているとして良い：

$$\varepsilon_{00}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}(au^2+bv^2+2cuv)},\quad e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=\psi(s)e_*^{\frac{\tau}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}.$$

従って，指数法則を使えば積公式

$$\varepsilon_{00}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=\psi(s)e_*^{(\frac{\tau}{\hbar}+\frac{\pi}{\hbar\sqrt{c^2-ab}})(au^2+bv^2+2cuv)}$$

が得られる．

$c^2-ab=0$ の場合には ε_{00} と $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は座標変換で次のようなものとして良い：

$$\varepsilon_{00}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv},\qquad e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=e^{\frac{t}{\hbar}u^2}.$$

$\varepsilon_{00}*e^{\frac{1}{\hbar}au^2}=e^{\frac{1}{\hbar}au^2}*\varepsilon_{00}$，に注意すれば，積公式 $e^{\frac{1}{\hbar}au^2}*e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ を確定するだけで良いが，これは ΨDO-積公式で次のように計算する：

$$e^{\frac{1}{\hbar}au^2}*e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}=-ie_\circ^{\frac{1}{\hbar}au^2}*e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}=-ie_\circ^{\frac{1}{\hbar}(au^2+2iuv)}. \tag{10.2}$$

積は ΨDO-表示で計算可能となっている．

$t=\frac{\pi}{2}$ の時には $e_*^{\frac{t}{\hbar}2uv}*e^{\frac{1}{\hbar}au^2}$ の積公式をモイヤル積公式で計算して得ることはできない．

注意　球撞き補題より次の式が得られる．$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}*e_*^{-u^2}=e_*^{-u^2}*e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}$. (u,v) に関

注2 他方，前のほうで $c^2-ab+1=0$ は真空に対応していると述べた．こちらのほうもどれを正準共役対とするかに関係しているのだが，正準共役対を変えると真空も変わってしまうので，こちらは混乱を生じない．

する正規順序表示表示では右辺は $e_\circ^{-u^2+\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ である．この公式はエルミート多項式の母関数 (5.14)を用いて直接計算で確かめることができる：

$$e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v} * e_\circ^{-u^2} = e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}\circ\sum_k \frac{(\hbar i)^k}{k!}(\frac{2i}{\hbar}u)^k(-\sqrt{2})^k H_k(u)\circ e^{-u^2}$$

$$=e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}\circ e^{\sqrt{2}(2\sqrt{2}u)u-\frac{1}{2}(2\sqrt{2}u)^2}\circ e^{-u^2}$$

$$=e_\circ^{-u^2+\frac{2i}{\hbar}u\circ v}.$$

10.3.2 あいまい群の岩沢分解(KAN-分解)

ε_{00} にはあいまいな性格が残っているが，それを残したままかなり計算は進むことをみるためにこの節では $SL(2,C)$ の岩沢分解に相当するものがここではどのような形に書かれるかを目標とする．

式(5.27)を逆に読むと次のような分解規則が得られる：

定理 10.3 M^3 の任意の元 $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は次の形に分解される：

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}uv} * e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2)}.$$

補題 5.2 と組み合わせると，M^3 の任意の元 $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は

$$e_*^{\frac{s}{\hbar}uv} * e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * e^{\frac{t}{\hbar}(v-riu)^2} = e_*^{\frac{s}{\hbar}uv} * e^{\frac{r}{2\hbar}u^2} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2} * e^{\frac{r}{2\hbar}u^2}$$

の形に分解される．

証明 $e_*^{\frac{t}{\hbar}uv}=\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}uv}$, と置くと，$1+s^2\neq 0$, 及び $c^2-ab+1\neq 0$ が仮定から分かる．$c=0$ なら何もしなくて良いから，$c\neq 0$ の場合を考えよう．

ここで，式 (5.27)の右辺の uv の係数 $c-(c^2-ab-1)s-cs^2$ が消えるように $s\neq \pm i$ を選ぶことができる．もし $\pm i$ が $c-(c^2-ab-1)s-cs^2=0$ の根である場合には $c-(c^2-ab-1)s-cs^2=-c(1+s^2)$ だから，$c=0$ となるが，これは考えていない場合である．

$ab\neq 0$ とすると，式 (5.28)から $(c^2-ab)s^2-2cs+1\neq 0$ が分かる．

$ab=0$ の場合は，仮定から $c^2+1\neq 0$ となり，式(5.27)の中で $s=-c$ としてよい．だから，例えば

$$e^{-\frac{s}{\hbar}uv} * e^{\frac{1}{\hbar}(bv^2+2cuv)} = \frac{1}{1+c^2}e^{\frac{b}{\hbar(1+is)^2}v^2}$$

のようになる． □

補題 5.3 と，式 (5.27)を使って，次の事が分かる：

命題 10.2 任意の $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ に対して，s を(5.27)式の右辺が

$$2(cs^2+(c^2-ab-1)-c)=a(1+is)^2+b(1-is)^2$$

をみたすように選べる．もしこの s で $(c^2-ab)s^2-2cs+1=0$ となる場合には，$e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ を補題 5.3 を使って

$$e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = \frac{1}{\sqrt{c^2-ab}}e^{-\frac{1}{\hbar(c^2-ab)}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

に置き換えて同じ結論が得られる．

証明

$$\begin{aligned}&2(cs^2+(c^2-ab-1)-c)-a(1+is)^2-b(1-is)^2\\&\quad=(2c+a+b)s^2+2(c^2-ab-1-ia+ib)s-(2c+a+b)\end{aligned}$$

だから，上の式が消えるように s を選ぶことができる．

このような s で $(c^2-ab)s^2-2cs+1=0$ となった場合には，(5.28)式より，

$$a(1+is)^2=b(1-is)^2=cs^2+(c^2-ab-1)s-c$$

が得られる．この場合には $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ のかわりに $e_*^{-\frac{\pi}{\hbar}uv} * e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ を考える．これに対して s をうまく選んでやるのである．　□

定理 10.4 (KAN-分解定理) $M^3 \bigcup_* \varepsilon_{00} * M^3$ の任意の元は次の形

$$e_*^{\frac{ri}{\hbar}(u^2+v^2)} * e_*^{\frac{s}{\hbar}uv} * e_*^{\frac{t}{\hbar}v^2}$$

に一意的に分解して書くことができる．また，同様に次の形

$$e_*^{\frac{r}{\hbar}u^2} * e_*^{\frac{s}{\hbar}uv} * e_*^{\frac{ti}{\hbar}(u^2+v^2)}$$

にも一意的に分解して書くことができる．

証明　正準共役対 $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+iv)$, $\bar{z}=\frac{i}{\sqrt{2}}(u-iv)$ に対して命題 10.2 を使う．正準共役対であること，$[z,\bar{z}]=-\hbar$ を調べるのは容易である．

任意の $e^{\frac{1}{\hbar}(az^2+b\bar{z}^2+2cz\bar{z})}$ に対して s をうまく選んで次の式

$$\begin{aligned}&(\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2z\bar{z}}) * (\sqrt{c^2-ab+1})\,e^{\frac{1}{\hbar}(az^2+b\bar{z}^2+2cz\bar{z})}\\&\quad=\sqrt{1+D}\,e^{\frac{1}{\hbar(1-2cs+(c^2-ab)s^2)}(a(1+is)^2z^2+b(1-is)^2\bar{z}^2+(c-(c^2-ab-1)s-cs^2)2z\bar{z})}\end{aligned}$$

の右辺が

$$a(1+is)^2+b(1-is)^2=-2(c-(c^2-ab-1)s-cs^2)$$

をみたすようにする．このような s で $1-2cs+(c^2-ab)s^2=0$ となってしまうときは $*$-積が M^3 からはみ出す場合だから，代わりに $\varepsilon_{00}*e^{\frac{1}{\hbar}(az^2+b\bar{z}^2+2cz\bar{z})}$ に対して命題 10.2 を使う．

すると右辺は次のように書かれる：

$$\sqrt{1+D}\,e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha z^2+\beta\bar{z}^2-(\alpha+\beta)z\bar{z})}.$$

これを u,v で書き直すと，任意の $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ または $\varepsilon_{00}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ に対して s が取れて，次の

$$\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{si}{\hbar}(u^2+v^2)}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},$$
$$\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{si}{\hbar}(u^2+v^2)}*\varepsilon_{00}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$

のうちのどちらか一方が $\sqrt{1+\sigma^2}e^{\frac{\sigma}{\hbar}(\gamma v^2+2uv)}$ の形に書かれることが分かる．

一方 $\sqrt{1+\sigma^2}\,e^{\frac{\sigma}{\hbar}(\gamma v^2+2uv)}$ は次の形に書かれる：

$$\sqrt{1+\sigma^2}\,e^{\frac{\sigma}{\hbar}uv}*e_*^{\frac{\sigma\gamma}{\hbar}v^2}.$$

これを組み合わせればよい．他のことは容易に証明される． □

式 (5.27)と式 (5.10)を使って，次の積を計算してみると

$$\sqrt{1+s^2}\sqrt{1-t^2}\,e^{\frac{r}{\hbar}u^2}*e^{\frac{s}{\hbar}2uv}*e^{\frac{t}{\hbar}(u^2+v^2)}=$$
$$\sqrt{(1+s^2)(1-t^2)}\,e^{\frac{r}{\hbar}u^2}*\frac{1}{\sqrt{1-t^2s^2}}e^{\frac{1}{\hbar(1-t^2s^2)}(t(1+is)^2u^2+t(1-is)^2v^2+(t^2+1)s2uv)}. \tag{10.3}$$

これは，次式と同じである．$P=1-t^2s^2+rt(1-is)^2$ として

$$\frac{\sqrt{(1+s^2)(1-t^2)}}{\sqrt{P}}\times e^{\frac{1}{\hbar P}(t(1+is)^2+r(t^2+1)(1-is)^2)u^2+t(1-is)^2v^2+((t^2+1)s-irt(1-is)^2)2uv}. \tag{10.4}$$

判別式の計算に使うのだが，容易に

$$\begin{aligned}&((t^2+1)s-irt(1-is)^2)^2\\&\quad-\big(t(1+is)^2+r(t^2+1)(1-is)^2\big)t(1-is)^2+\big(1-t^2s^2+rt(1-is)^2\big)^2\\&\quad=\big(1-t^2s^2+rt(1-is)^2\big)(1+s^2)(1-t^2)\end{aligned}$$

も検証される．岩沢分解定理は (10.4)が逆に解けることも示している．

10.3.3 NAN-分解

式 (5.27)と式 (5.10)を使って，次のような積を計算してみると

$$e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+r(1-is)^2t}}\, e^{\frac{1}{\hbar(1+r(1-is)^2t)}(r(1-is)^2u^2+t(1-is)^2v^2+2(s-ir(1-is)^2t)uv)} \tag{10.5}$$

が分かる．$1+r(1-is)^2t=0$ のときには $e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$ は計算できないが，かわりに $\varepsilon_{00} * e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * \sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$ を計算する．まず判別式の計算では

$$(s-ir(1-is)^2t)^2-rt(1-is)^4=(1+r(1-is)^2t)(1+r(1-is)^2t-s^2-1)$$

に注意しておいて，補題5.3 を使うと，$P=1+r(1-is)^2t-(1+s^2)$ として，

$$\varepsilon_{00} * e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * \sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{P}} e^{\frac{1}{\hbar P}(r(1-is)^2u^2+t(1-is)^2v^2+(s-ir(1-is)^2t)2uv)} \tag{10.6}$$

が得られる．だから $1+r(1-is)^2t=0$ の場合には

$$\varepsilon_{00} * e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * \sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$$
$$= -\,ie^{\frac{1}{\hbar(-(1+s^2))}(r(1-is)^2u^2+t(1-is)^2v^2+(s+i)2uv)} \tag{10.7}$$

となる．

$\varepsilon_{00} * \varepsilon_{00} = -1$ だから次の結果が得られる：

補題 10.3 $1+r(1-is)^2t \neq 0$ で $s \neq \pm i$ の場合には

$$e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * \sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$$

は式 (10.4)で与えられ，これは $*$-指数関数の形である．

$1+r(1-is)^2t=0$ で $s \neq \pm i$ の場合には

$$e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * \sqrt{1+s^2}\, e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2} = \varepsilon_{00} * e^{\frac{1}{\hbar(1+s^2)}(r(s+i)^2u^2+t(s+i)^2v^2-(s+i)2uv)}.$$

$r(s+i)^2u^2+t(s+i)^2v^2-(s+i)2uv$ の判別式は仮定より 0 となっている．

式 (10.6)の両辺を $\sqrt{1+s^2}$ で割って，$s=i$ の場合の公式を得ることができる．$2e^{\frac{i}{\hbar}2uv}$ は真空であり，

$$e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * 2e^{\frac{i}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2} = \frac{2}{\sqrt{1+4rt}}\ e^{\frac{1}{\hbar(1+4rt)}(4ru^2+4tv^2+i(1-4rt)2uv)} \tag{10.8}$$

である．

右辺の 2 次式の判別式を D として，c^2-ab+1 に相当する $D+1$ を計算すると

$$\frac{(i(1-4rt))^2-(4r)(4t)}{(1+4rt)^2}+1=0$$

である．つまり，$e^{\frac{2}{\hbar(1+4rt)}(2ru^2+2tv^2+i(1-4rt)uv)}$ は真空の集合 M^2 の元である．

$1+4rt=0$ の場合には $e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * 2e^{\frac{i}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2}$ は定義されない．しかし，$2e^{\frac{i}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2} = 2e^{\frac{1}{\hbar}2i(u-4tiv)v}$ であるから，

$$e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * 2e^{\frac{i}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2} = e^{\frac{r}{\hbar}(u-4tiv)^2+2(4itv(u-2itv)} * 2e^{\frac{1}{\hbar}2i(u-4tiv)v}$$

であり，これはもう少し何とかなる式である．

$s=-i$ の場合は特異である．$2e^{-\frac{i}{\hbar}2uv}$ は共役真空であり $u * e^{-\frac{i}{\hbar}2uv} = e^{-\frac{i}{\hbar}2uv} * v = 0$ であるから

$$e^{\frac{r}{\hbar}u^2} * 2e^{-\frac{i}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}v^2} = 2e^{-\frac{i}{\hbar}2uv} \tag{10.9}$$

であることが分かる．

公式(10.5)の逆転公式は次のようにして計算される：

与えられた $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ に対して，$X=1-is$ と置く．次の連立方程式を解けば良い：

$$a=\frac{rX^2}{1+rtX^2},\quad b=\frac{tX^2}{1+rtX^2},\quad c=i\frac{X-1-rtX^2}{1+rtX^2}.$$

まず $t/r=b/a$ が分かるからこれを θ と置く．第 3 の式より

$$1-ic=\frac{X}{1+rtX^2}$$

だから，第 1 の式との比をとってみれば，

$$\frac{a}{1-ic}=rX$$

が分かる．よって第1の式より

$$X = 1 - ic + \frac{ab}{1-ic}, \quad \text{だから} \quad s = \frac{c}{1-ic} - \frac{c^2 - ab}{1-ic}$$

となり，これより

$$r = \frac{a}{1-2ic-c^2+ab}, \quad t = \frac{b}{1-2ic-c^2+ab},$$

$$1 + rtX^2 = \frac{1-2ic-c^2+ab}{(1-ic)^2}$$

が得られる．これより，次の分解公式が得られる：

補題 10.4 $1-2ic-c^2+ab \neq 0$ で $c \neq -i$ ならば，次のような分解ができる：

$$e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$= \frac{\sqrt{1-2ic-c^2+ab}}{1-ic}\, e^{\frac{a}{1-2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}u^2} * e^{\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic}\frac{1}{\hbar}2uv} * e^{\frac{b}{1-2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}v^2} \tag{10.10}$$

系 10.3 ϖ_{00} の近くにある真空 $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ $(c^2 - ab + 1 = 0)$ は式(10.10)のように分解される．

次に $c^2-ab+1 \neq 0$ の場合を考える．この場合には $1-2ic-c^2+ab \neq 0$ あるいは $1-ic \neq 0$ であることに注意する．

$c^2-ab+1 \neq 0$ のときには $\sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は $*$-指数関数として書かれることに注意しておこう．

$$\sqrt{c^2-ab+1}\, e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} = e_*^{\frac{1}{\hbar\sqrt{c^2-ab}}(\arctan\sqrt{c^2-ab})(au^2+bv^2+2cuv)}$$

$$\sqrt{1+(\tfrac{c-i(c^2-ab)}{1-ic})^2}\, e^{\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic}\frac{1}{\hbar}2uv} = e_*^{\frac{1-ic}{c-i(c^2-ab)}(\arctan\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic})\frac{1}{\hbar}2uv}$$

であり，判別式の計算では以下のことに注意する：

$$1 + \left(\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic}\right)^2 = \frac{(c^2-ab+1)(1-2ic-c^2+ab)}{(1-ic)^2}.$$

これらを式(10.10)に代入してやって，$c^2-ab+1 \neq 0$, $1-2ic-c^2+ab \neq 0$,

$1-ic\neq 0$ の場合には

$$\sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=$$

$$e^{\frac{a}{1-2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}u^2}*\sqrt{1+(\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic})^2}\,e^{\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic}\frac{1}{\hbar}2uv}*e^{\frac{b}{1-2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}v^2} \tag{10.11}$$

と分解できることが分かる．

これの複素共役の式も成立するから $c^2-ab+1\neq 0,\ 1+2ic-c^2+ab\neq 0,$ $1+ic\neq 0$ の場合には

$$\sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$=e^{\frac{a}{1+2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}v^2}*\sqrt{1+(\frac{c+i(c^2-ab)}{1+ic})^2}\,e^{\frac{c+i(c^2-ab)}{1+ic}\frac{1}{\hbar}2uv}*e^{\frac{b}{1+2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}u^2} \tag{10.12}$$

と分解できることが分かる．これらを使うと次の定理が得られる：

定理 10.5 (NAN-分解定理) $c^2-ab+1\neq 0$ なる任意の $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ は次の形

$$e_*^{\frac{1}{\hbar}a'u^2}*e_*^{\frac{1}{\hbar}2c'uv}*e_*^{\frac{1}{\hbar}b'v^2}\quad \text{または}\quad e_*^{\frac{1}{\hbar}b'v^2}*e_*^{\frac{1}{\hbar}2c'uv}*e_*^{\frac{1}{\hbar}a'u^2}$$

に分解される．

証明　条件より，$1-2ic-c^2+ab\neq 0$ または $1+2ic-c^2+ab\neq 0$ が成立するから $1-2ic-c^2+ab\neq 0$ として話を進める．

$1-ic=0$ の場合には $c-i(c^2-ab)\neq 0$ であり，真中の項が発散するが，補題 5.3 を使えば，これは

$$\sqrt{1+(\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic})^2}\,e^{\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic}\frac{1}{\hbar}2uv}=\varepsilon_{00}$$

と書いても良い項であることが分かる．つまり，

$$\begin{aligned}&\sqrt{c^2-ab+1}\,e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\&\qquad=e_*^{\frac{a}{1-2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}u^2}*\varepsilon_{00}*e^{\frac{b}{1-2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}v^2}\end{aligned} \tag{10.13}$$

となる．

□

$1-ic\neq 0,\ 1-2ic-c^2+ab=0$ の場合には $u^2,\ v^2$ を含んだ項が発散す

るから式(10.11)の姿には分解できない．しかし，$\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic}=-i$ であり

$$e^{\frac{c-i(c^2-ab)}{1-ic}\frac{1}{\hbar}2uv}=e^{-\frac{i}{\hbar}2uv}.$$

となる．これは共役真空である．

このような場合に u,v の立場を入れ換えた，次のような分解を使わなければならない：

$$e_*^{\frac{1}{\sqrt{c^2-ab}}\arctan(\sqrt{c^2-ab})\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$=e_*^{\frac{b}{1+2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}v^2}*e_*^{\frac{1+ic}{c+i(c^2-ab)}\arctan(\frac{c+i(c^2-ab)}{1+ic})\frac{1}{\hbar}2uv}*e_*^{\frac{a}{1+2ic-c^2+ab}\frac{1}{\hbar}u^2} \tag{10.14}$$

$c^2-ab=0$ の場合には左辺で $\frac{1}{\sqrt{c^2-ab}}\arctan(\sqrt{c^2-ab})=1$ と置けば次が得られる：

$$e_*^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=e_*^{\frac{a}{1-2ic}\frac{1}{\hbar}u^2}*e_*^{\frac{1-ic}{c}\arctan(\frac{c}{1-ic})\frac{1}{\hbar}2uv}*e_*^{\frac{b}{1-2ic}\frac{1}{\hbar}v^2},$$

$$e_*^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}=e_*^{\frac{b}{1+2ic}\frac{1}{\hbar}v^2}*e_*^{\frac{1+ic}{c}\arctan(\frac{c}{1+ic})\frac{1}{\hbar}2uv}*e_*^{\frac{a}{1+2ic}\frac{1}{\hbar}v^2}.$$

$\arctan(\frac{c}{1\pm ic})$ は $2ic\pm1\neq0$ なる任意の c で定義される．

$c^2-ab+1=0$ の場合は少し注意が必要で，この場合には $\tan(\sqrt{c^2-ab}\,\theta)=\sqrt{c^2-ab}$ となる θ を選ぶことができない．つまり，

$$e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)},\qquad c^2-ab+1=0$$

は $*$-指数関数の元ではなく，真空の 1/2 である．

こういう場合には (10.11)の右辺は

$$e_*^{\frac{a}{2(1-ic)}\frac{1}{\hbar}u^2}*e_*^{\frac{1}{\hbar}i\arctan(i)2uv}*e_*^{\frac{b}{2(1-ic)}\frac{1}{\hbar}v^2}$$

であるが，$\arctan(i)=\infty$ である．だから $e_*^{\frac{1}{\hbar}i\arctan(i)2uv}$ は真空，または共役真空として表される．

これで分かるように $\pm$ の不定性があるとは言いながら，計算にはほとんど何の不都合も生じないのである．

10.3.4 あいまい有限群

あいまい群の考えを理解してもらうために，$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)\bigcup\varepsilon_{00}*\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中に 4 元数群と深い関係がある“有限部分群”が入っているのでこれを扱ってみよう．まず，(3.9)式より，複号同順で

$$e_*^{\pm\frac{\pi}{2\hbar}uv}=\sqrt{2}\,e^{\pm\frac{2}{\hbar}uv},\quad e_*^{\pm\frac{\pi}{4\hbar}(u^2-v^2)}=\sqrt{2}\,e^{\pm\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)},\quad e_*^{\pm\frac{\pi}{4\hbar i}(u^2+v^2)}=\sqrt{2}\,e^{\pm\frac{1}{\hbar i}(u^2+v^2)} \tag{10.15}$$

であるが，これらに式(5.27)をあてはめると，

$$\sqrt{2}e^{\pm\frac{1}{\hbar}2uv}*\sqrt{2}e^{\pm\frac{1}{\hbar i}(u^2+v^2)}=\sqrt{2}e^{\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)},$$
$$\sqrt{2}e^{\frac{1}{\hbar}2uv}*\sqrt{2}e^{\pm\frac{1}{\hbar i}(u^2+v^2)}=\sqrt{2}e^{\pm\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)}$$

という式が得られるが，$\varepsilon=\pm1,\tilde{\varepsilon}=\pm1$ を関数記号のように考えて，まとめて

$$\sqrt{2}e^{\varepsilon\frac{1}{\hbar}2uv}*\sqrt{2}e^{\tilde{\varepsilon}\frac{1}{\hbar i}(u^2+v^2)}=\sqrt{2}e^{\varepsilon\tilde{\varepsilon}\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)}$$

のように書かれる．同様に

$$\sqrt{2}e^{\varepsilon\frac{1}{\hbar}2uv}*\sqrt{2}e^{\tilde{\varepsilon}\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)}=\sqrt{2}e^{-\varepsilon\tilde{\varepsilon}\frac{1}{\hbar i}(u^2+v^2)}$$

であることが分かる．

記号を簡単にするために

$$\mathbf{e}_1=e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}uv},\quad \mathbf{e}_2=e_*^{\frac{\pi}{4\hbar i}(u^2+v^2)},\quad \mathbf{e}_3=e_*^{\frac{\pi}{4\hbar}(u^2-v^2)}$$

と置くと

$$\mathbf{e}_1^{\varepsilon}*\mathbf{e}_2^{\tilde{\varepsilon}}=\mathbf{e}_3^{\varepsilon\tilde{\varepsilon}},\qquad \mathbf{e}_1^{\varepsilon}*\mathbf{e}_3^{\tilde{\varepsilon}}=\mathbf{e}_2^{-\varepsilon\tilde{\varepsilon}}$$

のように書かれる．

$u'=\frac{1}{\sqrt{2i}}(u-iv),\ v'=\frac{1}{\sqrt{2i}}(u+iv)$ と置けば，これは量子正準共役対で

$$2u'v'=-i(u^2+v^2),\quad -i(u'^2+v'^2)=-(u^2-v^2),\quad u'^2-v'^2=-2uv$$

だから $SL(2;\mathbb{C})$-共変性を使えば，上の式で $\mathbf{e}_1\to\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_2\to\mathbf{e}_3^{-1}$，$\mathbf{e}_3\to\mathbf{e}_1^{-1}$，のように入換えた式が成立する：

$$\mathbf{e}_2^{\varepsilon}*\mathbf{e}_3^{-\tilde{\varepsilon}}=\mathbf{e}_1^{-\varepsilon\tilde{\varepsilon}},\qquad \mathbf{e}_2^{\varepsilon}*\mathbf{e}_1^{-\tilde{\varepsilon}}=\mathbf{e}_3^{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}.$$

同様に $u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$, $v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$ と置けば，これも量子正準共役対で

$$2u'v' = u^2 - v^2, \quad -i(u'^2 + v'^2) = -i(u^2+v^2), \quad u'^2 - v'^2 = -2uv$$

だから，$\mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_3$，$\mathbf{e}_2 \to \mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_1^{-1}$, のように入換えた式も成立する：

$$\mathbf{e}_3^{\varepsilon} * \mathbf{e}_2^{\tilde{\varepsilon}} = \mathbf{e}_1^{-\varepsilon\tilde{\varepsilon}}, \qquad \mathbf{e}_3^{\varepsilon} * \mathbf{e}_1^{-\tilde{\varepsilon}} = \mathbf{e}_2^{-\varepsilon\tilde{\varepsilon}}.$$

これらを全部まとめて，$\varepsilon_{00}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ で生成される集合 G を考える．これは 16 個の元

$$\{\pm 1,\ \pm\mathbf{e}_1,\ \pm\mathbf{e}_2,\ \pm\mathbf{e}_3,\ \pm\varepsilon_{00},\ \pm\varepsilon_{00} * \mathbf{e}_1,\ \pm\varepsilon_{00} * \mathbf{e}_2,\ \pm\varepsilon_{00} * \mathbf{e}_3\}$$

からなる集合で，演算規則は

- $\mathbf{e}_i^2 = \varepsilon_{00}$ は中心(center)の元であり，${\varepsilon_{00}}^2 = -1$ である．
- $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

で与えられる．

これだけ見ていると，全体はいかにも群をなしているように見えるのだがが，実は，この系は結合律が破れていて群をなしていない．しかし，± をつけたままでは結合律を満たしている．また $+a$ と $-a$ を同一視すれば 4 元数群になっている．

この場合，± をつけたままでの計算というのがあまり馴染みがないかもしれないが，$\mathbf{e}_i$ の位数は 8 と思っていて決して位数 4 と思っていないところが味噌である．

10.4　おわりに

とりとめのない終り方になってしまったが，これはひとえに ε_{00} の奇妙さに振り回された結果である．我々は最初はこれは

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(1) \to SO(3) \to 1$$

という完全列で解釈できるものと思っていたのであるが，やってみると全く違って，$SL(2,\mathbb{C})$ の 2 重被覆群といった，点集合としては理解不可能な対象を扱わなければならないという結論に達したのである．こんなものはこれまで数学の中でまともに扱われたことがない対象であるから，これはかなり重たい選択なのであって，その重さが所々に現れている．しかし，これは良く知っているはずの微積分を演算子的に見ている結果として現れているだけのものであるから，現行の量子論が必ず持っている不可思議さでもあるわけである．むしろ，このようなことが微積分の中で問題にされて来なかったことのほうが不思議な気がするのである．そう思って数学の分野を見渡すと，似たような概念は gerbe とか stack とか sheaf of groupoid とかの形で現れていることは散見できる([4] 参照)．しかし，どれも必要に迫られていると言うよりは，遊びに近いものとして現れている．微積分の代数といった身近なところで問題にされている例は見当たらないのである．

もっと端的に言えば，我々がこの本で問題にした「奇妙な事柄」に答えない限り量子論は理解できないだろうということなのである．**物理が，場の理論であれ何であれ，微積分の代数を道具として使っている限り我々がこの本で取り上げた「奇妙な事柄」からは離れられないのである．**しかも，少しひいきめに拡大解釈すると，問題にしている「奇妙な事柄」はすべて時間の一方向性に結びつくものである．

相対論を組み込んだ理論を量子論で作れば「発散の困難は解消する」と物理学者は言うけれども，そうであるならば我々の疑問に対する轟々たる反論を期待したいのである．

こういうことが結果的に数学そのものに良い刺激を与えると思うからである．

参考文献

[1] G.E. ANDREWS, R. ASKEY, R. ROY, **Special functions, Encyclopedia of Math. and Appl.71**, Cambridge Univ. Press. 1999.

[2] F.A. BEREZIN, *General concept of quantization,* Comm. Math. Phys. vol 8, (1975), 153–174.

[3] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, *Deformation theory and quantization, I,* Ann. Phys. **111** (1977), 61–151.

[4] J.L. BRYLINSKI, **Loop spaces, Characteristic classes and Geometric quantization,** Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1992.

[5] C.S.CHU, P.M.HO, B.ZUMINO, *The quantum 2-sphere as a complex quantum manifold,* LBL-37055, UCB-PTH-95/10.

[6] A. CONNES, **Non commutative geometry**, Academic Press, 1994.

[7] V.G. DRINFELD, *Quantum groups,* in Proceedings International Cong. Math. Berkley (1986), 798–820.

[8] I.M.GEL'FAND AND G.E. SHILOV, **Generalized functions, 2**, Academic Press, 1968.

[9] S. HELGASON, **Differential geometry and symmetric spaces,** Academic Press, 1962.

[10] L. HÖRMANDER, *Fourier integral operators I,* Acta Math. 127, 1971, 79–183.

[11] L. HÖRMANDER, *Weyl calculus of pseudo-differential operators,* Comn. Pure Appl. Math. 32, (1979), 359–443.

[12] S. KLIMEK, A. LESNIEWSKI, *Quantum Riemann Surfaces I. The Unit Disc* Commun. Math. Phys. vol.146, (1992), 103–122.

[13] B. KOSTANT, S. STERNBERG, *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite dimensional Clifford algebras,* Annals of Phys. vol 176, (1987) 49–113.

[14] T. MASUDA, H. OMORI, *Algebra of quantum groups as quantized Poisson algebras,* in Geometry and its applications, in honor of Morio Obata, World Scientific, (1993).

[15] M. MORIMOTO, **An introduction to Sato's Hyperfunctions**, AMS Trans. Mono.129, 1993.

[16] H. OMORI, **Infinire dimensional Lie groups,** vol 158, A.M.S. Trans. Monograph, (1997)

[17] 大森英樹，無限次元 LIE 群論， 紀伊国屋数学叢書 15 (1978)

[18] 大森英樹，数学の中の物理学， 東大出版会(2004)(予定)

[19] H.OMORI, Y.MAEDEA, A.YOSHIOKA, *A Poincaré-Birkhof-Witt theorem for infinite dimensional Lie algebras,* J. Math. Soc. Japan vol 46, (1994) 25–50

[20] H.OMORI, Y.MAEDA, A.YOSHIOKA, *Weyl manifolds and deformation quantization*, Adv. Math. **85** (1991), 224–255.

[21] H.OMORI, Y.MAEDA, N.MIYAZAKI, A.YOSHIOKA, *Group of quantum volume preserving diffeomorphisms and their Berezin representation*, in Analysis on infinite-dimensional Lie groups and algebras,World Scientific (1997), 337–354.

[22] H.OMORI, Y.MAEDA, N.MIYAZAKI, A.YOSHIOKA, *Noncommutative 3-sphere:A model of noncommutative contactalgebras*, Jour. Math. Soc. Japan, **50** (1998), 915–943

[23] H.OMORI, Y.MAEDA, N.MIYAZAKI, A.YOSHIOKA, *Convergence of the Moyal product defined on theFréchet-Poisson algebras of entire functions*, 233–245, in Conference Moshé Flato 1999 II. Kluwer Acad. Publ., 2001

[24] H.OMORI, Y.MAEDA, N.MIYAZAKI, A.YOSHIOKA, *Singular system of exponential functions*, 169–216, in Noncommutative differential geometry Math. Phys. Studies 23. Kluwer Acad. Publ., 2000.

[25] H.OMORI, Y.MAEDA, N.MIYAZAKI, A.YOSHIOKA, *Deformation quantizations of the Poisson algebra of Laurent polynomials*, Lett. Math. Phys.**46**, (1998), 171–180.

[26] OVSIENKO, *Exiotic deformation quantization,* J. Diff. Geometry, **45**, (1997), 390–406.

[27] M. RIEFFEL, **Deformation quantization for actions of $\mathbf{R}^n$**, Memoir of A.M.S. **106**, 1993.

[28] M. ROSSO, *Comparison des groups $SU(2)$ quantiques de Drinfeld et de Woronowicz,* C. R. Acad. Sci. vol 304 (1987), 232–326.

[29] A. J. SHEU (with appendix by J.H. Lu, A.Weinstein), *Quantization of the Poisson $SU(2)$ and its Poisson homogeneous space,* Commun. Math. Phys. vol 135, (1991), 217–232.

[30] S. L. WORONOWICZ, *Twisted $SU(2)$ group: An example of a non-commutative differential calculus,* Publ. RIMS. vol 23, (1987), 117–181

[31] K. YOSIDA, **Functional Analysis**, Springer, 1978.

索　引

著　者

大森　英樹（おおもり　ひでき）
東京大学大学院理学研究科修了
現在，東京理科大学理工学部数学科嘱託教授
専門：幾何学
主な著書：『力学的な微分幾何』（日本評論社），『一般力学系と場の幾何学』（裳華房），『無限次元リー群論』（紀伊國屋数学叢書），

前田　吉昭（まえだ　よしあき）
埼玉大学理工学部数学科卒業
東京都立大学大学院理学研究科数学専攻（修士）修了
理学博士
現在，慶應義塾大学理工学部数理科学科教授

シュプリンガー量子数理シリーズ
監修者

荒木　不二洋（あらき　ふじひろ）
京都大学名誉教授

大矢　雅則（おおや　まさのり）
東京理科大学理工学部情報科学科教授

量子的な微分・積分　定価（本体 4,500 円＋税）

発　行　2004 年 4 月 5 日　初　　版
　　　　2004 年 7 月 5 日　初版 2 刷
著　者　大森　英樹／前田　吉昭
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
　　　　〒113-0033　東京都文京区本郷 3 丁目 3 番 13 号
　　　　TEL (03) 3812-0757（営業直通）
印刷所　日経印刷株式会社

ISBN 4-431-71090-6　C3042
http://www.springer-tokyo.co.jp